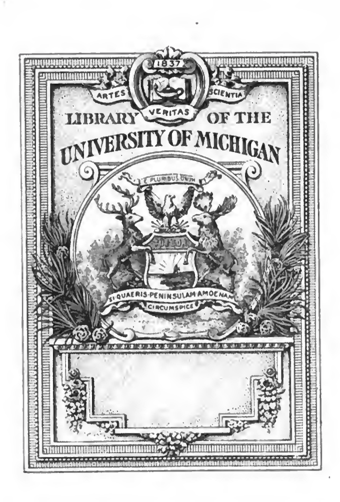
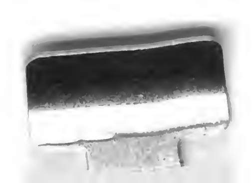

Astron. Obs.
QB
201
.S78
STORAGE


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





Beiträge zur Untersuchung
des
Genauigkeitsgrades astronomischer Berechnungen
mit
Anwendung auf eine in der geographischen Ortsbestimmung häufig vorkommende Aufgabe.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

von der

Philosophischen Facultät der Friedrich-Wilhelms-Universität

zu Berlin.

Genehmigt, und nebst den angefügten Thesen
öffentlich zu vertheidigen

am 31. Juli 1888

von

Hans Stadthagen.

Opponenten:

Dr. phil. **Fritz Plato.**
Dr. phil. **Paul Schwahn.**
Dr. philos. nat. **Wilhelm Wedding.**

Berlin.
Druck von G. Bernstein.
1888.

Seinen theuren Eltern

in Liebe und Dankbarkeit

gewidmet

vom

Verfasser.

Inhalt.

> Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch Nichts so auffallend zu erkennen, als durch die übertriebene Schärfe in den Zahlenrechnungen.
>
> Tralles.

Cap. 1.

Bei den heutigen Anforderungen an die Genauigkeit astronomischer Resultate ist es unumgänglich geboten, jeden der Faktoren, die dabei mit ins Spiel kommen, auf seine Leistungsfähigkeit hin zu prüfen, will man nicht die gewünschte Präzision überhaupt vergebens erstrebt haben oder zu ihrer Erreichung unnützen Aufwand an Zeit, Mühe, Schreiberei u. s. f. machen müssen. Nun sind ja unstreitig Beobachtung und Rechnung als die beiden Hauptfaktoren anzusehen, sie sind es also, die in erster Linie unter dem eben angegebenen Gesichtspunkt zu betrachten sind.

Gerade wie aber die Güte der Beobachtung unter sonst gleichen Verhältnissen namentlich von zwei Punkten: Güte des mechanischen Apparates und Geschicklichkeit des Beobachters abhängt, so kommt auch bei der Schärfe der Rechnung einmal die Geübtheit und der Organisationsgeist des Rechners, andererseits die Leistungsfähigkeit des technischen, d. h. des rechnerischen Apparates in Betracht. Den ersten Anspruch auf die letzte Bezeichnung haben aber noch immer die Logarithmentafeln. Den Beobachter nun, wie den Rechner kann, was seine Person anlangt, nur Uebung, sowie gut ertheilter und wohl verstandener Rath bessern, — die messenden Apparate zu vervollkommnen ist Sache des Mechanikers im Bunde mit Physikern und Mathematikern, — über die Grenzen dessen,

was er mit seinem rechnerischen Apparate, den Logarithmentafeln, erreichen kann, klar zu werden, dazu sollen unsere Untersuchungen einen kleinen Beitrag geben.

Will der Astronom nicht unnütz Zeit verschwenden, will er sich nicht alle Arbeit schwerer machen, als nöthig, und durch übertriebenen Aufwand von logarithmischen Stellen die Wahrscheinlichkeit der Schreib- und Rechenfehler erhöhen, so muss er sich einen Anhalt dafür zu verschaffen suchen, welche Resultate er in diesem oder jenem Falle etwa mit fünf-, welche er mit sechsstelligen Logarithmentafeln u. s. w. erzielen kann. Das grosse Verdienst, diesen Punkt, der den übrigen an Wichtigkeit wohl nicht nachsteht, mathematisch behandelt, zuerst eine Theorie der Logarithmenfehler gegeben zu haben, gehört dem bekannten Mathematiker Bremiker.*) Indessen ist seine Schrift — abgesehen davon, dass sie überhaupt vergriffen ist — in Folge ihrer ausserordentlichen Fülle von Druckfehlern, sowie ihrer allzugrossen Knappheit der Darstellung an manchen Stellen für das Studium sehr wenig geeignet. Ausserdem ist es von Interesse, in den theoretischen Entwicklungen etwas weiter zu gehen, als es Bremiker gethan, und zu untersuchen, in wie weit die Resultate dadurch beeinflusst werden.

Es erschien daher wünschenswerth, den Gegenstand noch einmal etwas strenger zu behandeln, wobei ich mich bemühen werde, die erwähnten Uebelstände möglichst abzustellen und auch die praktische Seite der Sache etwas mehr zu ihrem Rechte kommen zu lassen. Bei letzterem Bestreben wurde ich durch Herrn Prof. Foerster, Direktor der Sternwarte zu Berlin, unterstützt, welcher so freundlich war, mir auch einige der bezüglichen Experimente, die unter seiner Leitung im astronomischen Seminar gemacht waren, zur Verfügung zu stellen.

---

*) Bremiker: de erroribus, quibus computationes logarithmicae afficiuntur (6stellige Logarithmentafel von 1852).

Cap. 2.

Ein mit der grössten Schärfe direkt berechneter Logarithmus kann, bei der in der Praxis erforderlichen Abkürzung auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen, bis zu dem Betrage einer halben Einheit der letzten noch anzugebenden Stelle zu gross oder zu klein werden, da man diese Stelle bei der Abkürzung unverändert lässt, so lange der Betrag der nicht mehr anzugebenden Dezimaltheile derselben die Hälfte der Einheit noch nicht erreicht, dagegen die letzte anzugebende Stelle um eine volle Einheit zu erhöhen pflegt, sobald der Betrag der nicht mehr anzugebenden Dezimaltheile derselben die Hälfte der letzten anzugebenden Stelle erreicht oder übersteigt. Bei den nachfolgenden Untersuchungen über die aus diesen Abrundungen hervorgehenden Fehler logarithmischer Rechnungen ist es als praktisch unerheblich erachtet worden, über ein halbes Prozent der Einheit der letzten angegebenen Stelle hinauszugehen, d. h. mit andern Worten, mehr Dezimalstellen in Betracht zu ziehen, als diejenigen beiden, welche auf die letzte in der Logarithmentafel angegebene Stelle folgen.

50 Hunderstel dieser Stelle (also z. B. bei fünfstelligen Logarithmen 50 Einheiten der siebenten Stelle) werden hiernach den Maximalfehler repräsentiren, welcher der letzten angegebenen und abgerundeten Stelle eines unmittelbar aus der Tafel entnommenen Logarithmus anhaften kann. Grösser kann der aus der Abrundung hervorgehende Fehler bei einem aus der Tafel interpolirten Logarithmus werden. Sind nämlich L der wahre Werth des gesuchten, L_1 und L_2 die wahren Werthe resp. des nächst kleineren und nächst grösseren Logarithmus, ferner f_1 und f_2 die aus der Abrundung in L_1 und L_2 hervorgegangenen, f_3 der durch die definitive Abkürzung des Resultates der Interpolation zwischen beiden entstandene Fehler, so erhält man aus der Interpolation zwischen den Werthen der Tafel nicht den wahren Logarithmus L, sondern $L+F$ in folgender Weise:

$$L+F=(L_1+f_1)+\varepsilon\left\{(L_2+f_2)-(L_1+f_1)\right\}+f_3.$$

Wären Abkürzungsfehler nicht vorhanden, so wäre:

$$L = L_1 + \varepsilon \{L_2 - L_1\}.$$

Durch Subtraktion beider Gleichungen erhalten wir also den Fehler eines interpolirten Logarithmus:

$$F = f_1 + \varepsilon(f_2 - f_1) + f_3,$$
$$F = (1 - \varepsilon) f_1 + \varepsilon f_2 + f_3.$$

Jedes einzelne f hat im Maximum den Werth 50. Diesen eingesetzt erhalten wir als Maximalwerth von F: $F = 100$.

Wir haben demnach den Fehler jedes Tafellogarithmus: $f \leqq 50$, den jedes interpolirten Logarithmus: $F \leqq 100$ in Einheiten der zweitnächsten Dezimalstelle.

Bei längeren Rechnungen kann nun durch das Zusammenwirken einer grösseren Anzahl dieser Fehler das Resultat sehr stark beeinflusst werden, sodass es erforderlich ist, sich z. B. vor Benutzung einer Formel über den Maximalfehler, den wahrscheinlichen Fehler u. s. w., den das Resultat aus dem angegebenen Grunde haben kann, klar zu werden. Man wird erst dann ermessen können, wievielstellige Logarithmen bei der verlangten Genauigkeit anzuwenden sind, oder man wird unter Umständen einem anderen Rechnungsverfahren den Vorzug geben.

Die Grundfragen, welche beantwortet werden müssen, bevor an eine solche theoretische Behandlung derjenigen Fehler gegangen werden kann, welche von der willkürlichen, aber praktisch unerlässlichen Abkürzung der in den Logarithmentafeln angesetzten Zahlenwerthe herrühren, sind die folgenden:

1. Stehen diese Fehler in irgend einem einfachen und durchsichtigen Abhängigkeitsverhältniss zu den Werthen der Logarithmen selber in solchem Sinn, dass z. B. gewisse Perioden oder Zahlenfolgen existiren, nach deren Verlaufe Fehler von bestimmter Grösse und bestimmtem Zeichen gesetzmässig wiederkehren, oder kann man bei logarithmischen Rechnungen im Ganzen und Grossen das Zusammenwirken der fraglichen Fehler als ein ähnliches betrachten, wie das der sogenannten zufälligen Beobachtungsfehler, welche im Einzelnen absolut regellos einzutreten scheinen und nur

in grösseren Gruppen eine Art von summarischer Gesetzmässigkeit erkennen lassen?

2. Hat man, falls die eben angedeutete Analogie im Allgemeinen zutrifft, den aus der abgekürzten Angabe des Tafelwerthes eines einelnen Logarithmus hervorgegangenen Fehler desselben als einen sogenannten Elementarfehler oder als das Ergebniss eines Zusammenwirkens von verschiedenen Quellen sogenannter Elementarfehler anzusehen? — Als Elementarfehler werden hierbei, im Sinne der Laplace'schen Fehlertheorie, solche betrachtet, bei denen die relative Häufigkeit des Vorkommens innerhalb gewisser Grenzen der Zahlenwerthe von der Grösse des Zahlenwerthes und natürlich auch von dem Vorzeichen des Fehlers unabhängig, bei denen also innerhalb jener Grenzen jeder Zahlenwerth gleich wahrscheinlich ist.

Was die Frage 1. betrifft, so ist es einleuchtend, dass es logarithmische Ausdrücke gibt, zwischen deren Komponenten so einfache zahlenmässige Beziehungen obwalten, dass auch zwischen den aus der Abkürzung hervorgehenden Fehlern der Logarithmen der einzelnen Komponenten unter einander, und dem Abkürzungsfehler des Rechnungsergebnisses einfache gesetzmässige Beziehungen bestehen. Es kann sich aber bei der Beantwortung der Frage 1. nicht um solche singuläre Fälle, sondern nur um die Fehler der Rechnungsergebnisse beliebiger logarithmischer Ausdrücke handeln, im Vergleich zu deren Vorkommen die relative Häufigkeit jener singulären Ausdrücke verschwindend klein ist. So wird denn für unsere allgemeine Untersuchung über die wahrscheinlichste Art der Zusammensetzung und Anhäufung dieser Fehlereinflüsse bei beliebigen logarithmischen Rechnungen die letztere der beiden im 1. aufgestellten Alternativen schon von vornherein unbedenklich zu bejahen sein.

Die Frage 2. dagegen kann nicht ohne Weiteres durch allgemeine Betrachtungen erledigt werden, sondern es ist erforderlich, erfahrungsmässig nachzuweisen, ob innerhalb der vorangehend festgestellten Fehlergrenzen von ± 50 Hunderteln der letzten an-

gegebenen Stelle eines in der Tafel enthaltenen Logarithmus bei der Prüfung einer sehr grossen Anzahl von Logarithmen die relative Häufigkeit des Vorkommens der Fehler von der Grösse ihres Zahlenwerthes oder von ihrem Zeichen irgendwie abhängig befunden wird. Hinsichtlich der Gleichheit der relativen Häufigkeit der einzelnen Logarithmenfehler, wenn sie als Elementarfehler anzusehen sind, ist aber zu bemerken, dass für 0 und 50 eine Ausnahme stattfindet, insofern als diese beiden Fehler nur die halbe Wahrscheinlichkeit im Vergleich zu der der Fehler 1 bis 49 haben dürfen. Die beiden letzten Stellen eines (z. B. 7stelligen) Logarithmus nehmen jeden der Zahlenwerthe 0 bis 99 mit gleicher Wahrscheinlichkeit an, betrachten wir aber die Fehler der Logarithmen, bei denen jene Endungen ohne weiteres, resp. unter Erhöhung der letzten Ziffer fortgelassen sind, so entsprechen die absoluten Fehler 1, 2, . . . 49 je zwei früheren Endungen, die absoluten Fehler 0 und 50 aber nur je einer. Die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens der beiden letzteren Fehler kann daher nur halb so gross sein, wie die der übrigen.

Die zweite Frage findet nun ihre Erledigung durch folgende Untersuchungen:

1) Es wurden von mir 5400 fünfstellige Logarithmen (Tafeln von August) mit den entsprechenden siebenstelligen (Tafeln von Bremiker) derartig verglichen, dass die Differenzen (fünfstellig weniger siebenstellig) gebildet wurden. Die Logarithmen wurden direkt den Tafeln entnommen, wobei natürlich die singulären Stellen im Sinne obiger Erörterungen, also die, bei denen die Differenzen gerade 100 oder Vielfache von 100 betragen, sowie besonders alle Logarithmen der Potenzen von 10 vermieden wurden.

Es fand sich nun, dass von den 5400 Fehlern 2698 das positive, 2653 das negative Zeichen hatten, während 49 gleich 0 waren.

2) Ein ähnliches Resultat stellte sich bei einer zweiten Beobachtungsreihe von 2750 anderen Logarithmen heraus, nämlich: 1364 Fehler positiv, 1345 negativ, 41 gleich 0.

In beiden Reihen zeigt sich deutlich eine Abweichung nach derselben Seite hin, indem nämlich die Anzahl der negativen Fehler etwa um 1% zu gering ist, die der positiven entsprechend zu gross. Es lässt sich wohl nicht die Möglichkeit von der Hand weisen, dass diese Erscheinung in dem Abrundungsverfahren bei der Berechnung der 5 stelligen Logarithmen (August) ihren Grund haben kann. Ist nämlich so verfahren, dass die Richtigkeit der Abrundung der 5. Stelle überwiegend nur durch Vergleichung mit siebenstelligen Logarithmen festgestellt, also bereits, im Falle eine 495 der fünften Dezimale folgte, diese erhöht wurde, so würde der Effekt gerade der sein, dass die Häufigkeit des Vorkommens negativer Fehler um etwa 1% vermindert wird gegenüber dem Ergebniss, das einem strengeren Abkürzungsverfahren entspräche.

Wie weit die Deutlichkeit des Nachweises im Sinne der zweiten Grundfrage hinsichtlich der Unabhängigkeit der Häufigkeit der Fehler von ihrem Zahlenwerthe geht, zeigt folgende Tabelle:

Fehler-grösse*)	I. Anzahl des Vorkommens unter 5400 Logarithmen	II. Anzahl des Vorkommens unter 2750 Logarithmen	III. Anzahl des Vorkommens unter allen 8150 {I+II} Logarithmen
0	49	41	90
1	114	52	166
2	96	64	160
3	124	53	177
4	133	55	188
5	98	71	169
6	114	47	161
7	87	66	153
8	123	58	181
9	114	61	175
10	109	60	169

*) Genauer ausgesprochen bedeutet die Fehlergrösse 0, dass der Fehler absolut zwischen 0 und 0.5; dagegen die Fehlergrössen 1, 2 u. s. w., bis incl. 49, dass die Fehler zwischen 0.5 und 1.5, 1.5 und 2.5 u. s. w., bis 48.5 und 49.5 liegen, während endlich die Fehlergrösse 50 bedeutet, dass der Fehler zwischen 49.5 und 50 liegt.

Fehlergrösse	I. Anzahl des Vorkommens unter 5400 Logarithmen	II. Anzahl des Vorkommens unter 2750 Logarithmen	III. Anzahl des Vorkommens unter allen 8150 {I+II} Logarithmen
11	125	53	178
12	112	67	179
13	102	55	157
14	117	56	173
15	109	63	172
16	100	65	165
17	104	64	168
18	102	61	163
19	118	55	173
20	107	67	174
21	111	63	174
22	106	63	169
23	120	62	182
24	105	43	148
25	117	55	172
26	108	43	151
27	118	71	189
28	112	38	150
29	98	41	139
30	106	53	159
31	111	50	161
32	93	56	149
33	108	47	155
34	126	40	166
35	111	45	156
36	90	49	139
37	101	71	172
38	103	41	144
39	110	64	174
40	111	42	153
41	120	53	173
42	93	39	132
43	96	52	148
44	105	57	162
45	106	49	155
46	101	58	159
47	106	49	155
48	112	49	161
49	95	39	134
50	44	34	78

Bei vollkommener Unabhängigkeit der relativen Häufigkeit des Vorkommens von der Grösse des Zahlenwerthes innerhalb gewisser

Grenzen müsste jeder Fehler in Reihe I, II und III resp. die Häufigkeitszahl 108, 55, 163 haben, abgesehen von 0 und 50, denen nur die halb so grossen 54, 28, 82 zukommen. In Prozenten ausgedrückt beträgt die grösste Abweichung hiervon in:.

No. I: 23,

No. II: 31 (abgesehen von der Abweichung 49 beim Fehler 0),

No. III: 19.

Eine Annäherung an die fragliche Unabhängigkeit ist hiernach unverkennbar. Noch deutlicher zeigt sie sich, wenn wir in etwas weiteren Intervallen schichten, etwa von 10 zu 10, wovon die folgende Tabelle, in der der Beobachtung (B) immer die ideale Voraussetzung oder Rechnung (R) gegenübergestellt ist, ein klares Bild giebt:

	I. unter 5400 Logarithmen			II. unter 2750 Logarithmen			III.*) unter 8150 Logarithmen		
	R	B	$R-B=v$	R	B	v	R	B	v
Es liegen zwischen 0 und 10.5 . . .	1134	1161	−27	578	628	−50	1712	1789	−77
Es liegen zwischen 10.5 und 20.5 . .	1080	1096	−16	550	606	−56	1630	1702	−72
Es liegen zwischen 20.5 und 30.5 . .	1080	1101	−21	550	532	+18	1630	1633	− 3
Es liegen zwischen 30.5 und 40.5 . .	1080	1064	+16	550	505	+45	1630	1569	+61
Es liegen zwischen 40.5 und 50 . . .	1026	978	+48	522	479	+43	1548	1457	+91

Die grösste Abweichung beträgt also unter No. I noch nicht 5 %, unter No. II etwa 10 %, unter No. III etwa 6 %, — dagegen die mittlere Abweichung: 2.4 %, resp. 7.7 %, resp. 3.7 %.

Es zeigt sich nun aber in beiden Beobachtungsreihen betreffs des sogenannten Centralfehlers, der von eben so vielen Fehlern nicht erreicht, als übertroffen wird, die folgende Erscheinung. Derselbe ergibt sich in der ersten Reihe: $\varepsilon_0 = 24.5$,

in der zweiten Reihe: $\varepsilon_0 = 22.7$,

folglich bei Berücksichtigung der Anzahl der Fehler aus beiden:

*) Durch die unverhältnismässig ungünstige Reihe II wird bei dem augenscheinlich vorhandenen Gang bewirkt, dass sich wider alle Erwartung das Resultat bei der grössten Anzahl von Beobachtungen ungünstiger stellt, als bei Reihe I.

$$\varepsilon_0 = 23.9,$$

und bei gleichzeitiger Schichtung beider Reihen:

$$\varepsilon_0 = 24.0,$$

während er bei vollkommener Unabhängigkeit der Schichtung von den Zahlenwerthen der Fehler gleich 25.0 sein sollte.

Dieser Abweichung entsprechend wird sich später, wenn wir die eine Beobachtungsreihe von 5400 Logarithmen noch zu anderweiten Untersuchungen verwenden werden, bei einem Vergleich zwischen Theorie und Praxis herausstellen müssen, dass die Fehlerwirkungen in der Praxis nicht ganz an die heranreichen, die aus der Theorie folgen. Und in der That tritt, wie wir sehen werden, diese Erscheinung ein.

Im Ganzen und Grossen dürfen wir aber auf Grund obiger Ermittlungen annehmen, dass die einzelnen Fehler, welche aus der Abkürzung je eines aus der Logarithmentafel unmittelbar entnommenen Werthes hervorgehen, als Elementarfehler im Sinne der Frage 2) siehe pag. 9) zu betrachten sind. Bei Kombinationen dieser Fehler wird sich nun aber sofort eine Abhängigkeit der relativen Häufigkeit des Vorkommens bestimmter Zahlenwerthe von den Zahlenwerthen selber zeigen müssen in der Weise, dass bei einer Kombination von Logarithmenfehlern die relative Häufigkeit vom möglichen Minimum zum möglichen Maximum abnimmt.

Dies zeigte sich in der That erfüllt, wenn wir von den obigen 5400 Logarithmen je 20 willkürlich zu einer Summe vereinigten, sodass also das mögliche Fehlermaximum bei 1000 Einheiten der siebenten Stelle lag. Es ergab sich, dass von den auf diese Weise erhaltenen 270 Fehleraggregaten:

zwischen	0 und 50.5	50.5 und 100.5	100.5 und 150.5	150.5 und 200.5	200.5 und 250.5	250.5 und 300.5	300.5 und 350.5	350.5 und 1000
lagen	91	83	52	31	8	4	1	0

Wie weit diese Fehlersummenvertheilung im Einzelnen mit der Theorie übereinstimmt, werden wir später sehen.

Nunmehr. da die Grundfragen eine genügende Beantwortung erfahren haben, können wir an unsere Aufgabe selbst gehen:

Ermittlung der Fehlergrenzen, der Wahrscheinlichkeitsfunktion für bestimmte Fehlergrössen, des wahrscheinlichen Fehlers u. s. w., der Resultate logarithmischer Rechnungen.

Zuerst wird dabei zu untersuchen sein, in welcher Form sich diese Resultatfehler darstellen, also es werden Formeln abzuleiten sein, die zeigen, wie sich ein Fehler des Logarithmus auf den Numerus und umgekehrt, oder z. B. wie sich ein Fehler in der Tangente auf den Sinus desselben Winkels wirft u. s. w. Es ist hierbei zu beachten, dass wir ja stets mit fehlerhaften Daten rechnen, sodass es also auch darauf ankommt, die Wirkungen dieser Fehler — der Datenfehler — im ganzen Laufe der Rechnungen kennen zu lernen, seien dieselben ihrer wirklichen, wahrscheinlichen oder nur ihrer möglichen Maximalgrösse nach bekannt.

Bei den aus der Abkürzung hervorgehenden Fehlern, deren Grösse und Zeichen uns in der Regel nicht bekannt ist, würde es nicht nöthig sein, in den nachfolgenden Formeln die Vorzeichen anzugeben. Wir werden in den Formeln das doppelte Vorzeichen daher nur so weit beibehalten, als sie sich auch auf Datenfehler beziehen, die ja unter Umständen mit bestimmten Zeichen gegeben sein können.

Cap. 3.

Die folgenden bekannten Differentialformeln, in denen m den Modul des betreffenden, also in der Praxis im allgemeinen des Briggeschen (10.) Systems bedeutet, geben die Beziehungen zwischen Incrementen der Numeri und den entsprechenden Incrementen der Logarithmen an:

A.

$$1)\ d\log x = \frac{dx}{x}\cdot m,$$

$$2)\ d(\log\sin x) = \operatorname{ctg} x\, dx.m \;\ldots\ldots\; 3)\ d(\log\cos x) = -\operatorname{tg} x\, dx.m,$$

$$4)\ d\log(\operatorname{tg} x) = \frac{2}{\sin 2x}\,dx.m \;\ldots\ldots\; 5)\ d(\log\operatorname{ctg} x) = -\frac{2}{\sin 2x}\,dx.m.$$

In den vier letzten dieser Formeln, welche angeben, wie sich

der Logarithmus bei einer kleinen Aenderung des Numerus ändert oder umgekehrt, ferner wie sich der log sin mit dem Winkel ändert u. s. w., ist übrigens noch die rechte Seite durch den Radius des Kreises $r = 206265''$ zu dividiren, um die Aenderung des Logarithmus statt in Bogensekunden als einfache Zahl in der Einheit 1 $\left\{\frac{dx''}{r''} = Z\right\}$ auszudrücken. Für die Rechnung sei hier:

$$m = \overset{10}{\log} e = 0.43429,$$

und also

$$\frac{m\,dx''}{r''} = \frac{2.105}{10^6}\,dx.$$

Wir können nun die Fehler der Daten sowohl, wie die durch Abkürzung der Logarithmen entstandenen als differential in Beziehung auf die Daten, bez. Logarithmen selbst ansehen und demnach diese Formeln auch so interpretiren, dass sie die Wirkung von Fehlern in den Numeris auf die Logarithmen und umgekehrt angeben. Wir wollen daher in Zukunft statt des Differentialzeichens den Buchstaben f (=Fehler) gebrauchen. Offenbar geben aber die obigen Formeln noch nicht den Gesammtfehler der Logarithmen, sondern es fehlt eben rechts immer noch der durch die Abkürzung des betreffenden Logarithmus, resp. der Logarithmen überhaupt entstandene Fehler, den wir generell mit f' bezeichnen wollen. Es hat das f' im Falle eines Tafellogarithmus im Maximum den Werth 50, im Falle eines interpolirten Logarithmus, wie wir im Cap. 2 pag. 7 u. 8 sahen, den Werth 100 als Grenze.

Cap. 4.

Sehen wir jetzt einmal von dem Abkürzungsfehler ab, der ja für verschiedene Stellen der Logarithmentafel immer den gleichen Werth mit gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen kann, so ergeben schon die obigen Formeln ein Kriterium, wie weit die Genauigkeit mit der ein gewöhnlicher oder ein trigonometrischer Logarithmus aus einem fehlerhaften Numerus oder Winkel gefunden werden kann, von der Grösse des betreffenden letzteren abhängt. Die folgenden Regeln sind nach dieser Richtung hin eine Uebersetzung der 5 Formeln in Worte:

1) Der Fehler einer Zahl geht in um so geringerem Grade auf den Logarithmus über, je grösser die Zahl ist.

2) Die günstigste Lage eines Winkels,
um aus ihm den log sin. zu bestimmen, ist: bei 90^0 und 270^0
- - - - log cos - - - : bei 0^0 und 180^0
- - - - log tg od. log ctg - - : bei 45^0 u. dessen ungeraden Vielfachen.

3) Die fehlerhaftesten Resultate ergeben:
bei der Bestimmung des log sin: Winkel bei 0^0 und 180^0
- - - - log cos: - bei 90^0 und 270^0
- - - - lgtg od. log ctg: - bei 0^0, 90^0 und dessen Vielfachen.

Wir können aber durch Umkehrung unserer Formeln die Frage beantworten, wie sich überhaupt ein Fehler des Logarithmus auf den Numerus oder Winkel überträgt. Es folgen aus ihnen, wenn wir gleich das Differentialzeichen d durch das Fehlerzeichen f ersetzen, diese 5 weiteren:

B.

$$1)\ f(x) = \frac{1}{m} x f(\log x),$$

$$2)\ f''(x) = \frac{r''}{m} \operatorname{tg} x f(\log \sin x) \ \ldots\ldots\ 3)\ f''(x) = -\frac{r''}{m} \operatorname{ctg} x f(\log \cos x),$$

$$4)\ f''(x) = \frac{r''}{2m} \sin 2x f(\log \operatorname{tg} x) \ \ldots\ldots\ 5)\ f''(x) = -\frac{r''}{2m} \sin 2x f(\log \operatorname{ctg} x),$$

oder in Worten:

1) Ein Fehler im Zahlenlogarithmus überträgt sich in desto stärkerem Grade auf die Zahl, je grösser dieselbe ist.

2) Will man einen Winkel aus einem Logarithmus ableiten, so geht der Fehler des Logarithmus am wenigsten in den Winkel ein
beim log sin: bei 0^0 oder 180^0
- log cos: bei 90^0 oder 270^0
- log tg oder log ctg: bei 0^0, 90^0 und dessen Vielfachen.

3) Der Fehler des Logarithmus zeigt sich im Winkel am stärksten
beim log sin: bei 90^0 oder 270^0

beim log cos: bei 0^0 oder 180^0

- log tg oder log ctg: bei 45^0 und dessen ungeraden Vielfachen.

Hiernach berechnet sich natürlich auch die Wirkung der logarithmischen Abkürzungsfehler. Z. B. können wir aus Formel 4) und 5) Serie B. die Grenze berechnen, unter der bei einer bestimmten Logarithmentafel der in Folge der Abkürzung der Logarithmen im Winkel entstandene Fehler (in Sekunden ausgedrückt) liegen muss, wenn wir ihn aus dem log tg oder log ctg berechnen. Es ist, wenn n die Dezimalstellenzahl der angewandten Tafeln bedeutet, der Abkürzungsfehler des Logarithmus:

$$f(\log \operatorname{tg} x) = f(\log \operatorname{ctg} x) \leqq \pm \frac{0.5}{10^n},$$

wonach sich für beide Fälle unter Annahme der ungünstigsten Lage des Winkels, also bei 45^0, ergiebt:

1) für $n = 7$: $f''(x) \leqq 0''.0119$,

2) „ $n = 6$: $f''(x) \leqq 0''.119$,

3) „ $n = 5$: $f''(x) \leqq 1''.19$.

Hat man demnach für die Grösse des Winkels keinen vorherigen Anhalt und wünscht man ihn z. B. aus einer derartigen Bestimmung bis auf $^1/_5{}''$ etwa genau zu erhalten, so genügt es, 6. stellige Tafeln anzuwenden.

Im Allgemeinen aber wird man sich bei der Entscheidung, mit wieviel logarithmischen Stellen man eine Rechnung führen will, nach dem Genauigkeitsgrade zu richten haben, welchen die den zu Grunde gelegten empirischen Daten unvermeidlich anhaftenden Messungsfehler überhaupt in den Rechnungsresultaten erreichen lassen. Grundsätzlich ist es auszuschliessen, dass der Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Rechnungsergebnisse durch die vermeidlichen Abkürzungsfehler der Rechnung in irgend erheblichem Grade vergrössert werde.

Cap. 5.

Es erübrigt jetzt, entsprechend den Erörterungen am Ende des Cap. 3 pag. 16 die allgemeinen Formeln für die Abkürzungsfehler aufzustellen.

A′.

$$1)\ f(\log x) = \frac{m}{x} f(x) + f',$$

$$2)\ f(\log \sin\varphi) = \frac{m}{r''} \operatorname{ctg}\varphi\, f''(\varphi) + f',\quad 3)\ f(\log\cos\varphi) = -\frac{m}{r''} \operatorname{tg}\varphi\, f''(\varphi) + f',$$

$$4)\ f(\log \operatorname{tg}\varphi) = \frac{2m}{r''\sin 2\varphi} f''(\varphi) + f',\quad 5)\ f(\log\operatorname{ctg}\varphi) = -\frac{2m}{r''\sin 2\varphi} f''(\varphi) + f'.$$

Diese erste Serie von Gleichungen giebt uns ein Mittel an die Hand, den endgültigen Fehler eines Logarithmus als lineare Funktion des Fehlers des vorher berechneten oder gegebenen Numerus, bez. Winkels und des allgemeinen Fehlers f' auszudrücken, welcher bei jedem Logarithmus durch die Abkürzung und eventuell noch durch Interpolation entsteht.

Durch Umkehrung erhalten wir die nöthigen Formeln, um den schliesslichen Fehler im Numerus oder Winkel zu finden, wenn wir den Fehler eines berechneten oder gegebenen Logarithmus mit Einschluss des ihm anhaftenden f' kennen.

Sie lauten:

B′.

$$1)\ f(x) = \frac{x}{m}\left\{f(\log x) - f'\right\},$$

$$2)\ f''(\varphi) = \frac{r''}{m}\operatorname{tg}\varphi\left\{f(\log\sin\varphi) - f'\right\},\quad 3)\ f''(\varphi) = -\frac{r''}{m}\operatorname{ctg}\varphi\left\{f(\log\cos\varphi) - f'\right\},$$

$$4)\ f''(\varphi) = \frac{r''}{2m}\sin 2\varphi\left\{f(\log\operatorname{tg}\varphi) - f'\right\},\quad 5)\ f''(\varphi) = -\frac{r''}{2m}\sin 2\varphi\left\{f(\log\operatorname{ctg}\varphi) - f'\right\}.$$

Cap. 6.

Diese 10 Formeln (Serie A' und B') können nun so kombinirt werden, dass man den Gesammtfehler einer beliebigen grösseren oder kleineren logarithmischen Rechnung als lineare Funktion der einzelnen Fehler darstellen, dass man also z. B. den Maximalfehler einer Grösse finden kann, die vermittelst dieser oder jener Formel berechnet ist. Es wird dadurch möglich sein, die Güte mehrerer Formeln, die demselben Zwecke dienen, unter dem Gesichtspunkt ihrer gegenseitigen Genauigkeit zu prüfen. Von vornherein leuchtet ein, dass Summenausdrücke nur den geringsten Grad an Präzision

erreichbar machen in Folge des wiederholten Uebergangs vom Numerus zum Logarithmus und umgekehrt. In Anbetracht des noch hinzutretenden Vortheils geringeren Zeitaufwandes ist es daher im allgemeinen zu empfehlen, Formeln möglichst auf Faktorenform zu stellen. Freilich kann auch die Summandenform Vortheile bieten, wenn sie nämlich zugleich mit der Wurzelform auftritt, da ja letztere die logarithmisch günstigste Form ist, insofern als der Gesammtfehler des Radikandus nur durch den Wurzelexponenten getheilt in die weitere Rechnung eingeht, und es manche Fälle gibt, in denen dieser Vortheil nicht an anderer Stelle wieder aufgehoben wird.

Nehmen wir einmal als Beispiel die Berechnung der Zenithdistanz z eines Gestirns aus der Deklination δ, dem Stundenwinkel τ, und der geographischen Breite des Beobachtungsortes φ mittelst der Formel:

1) $$\sin^2 \frac{1}{2} z = \sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2} + \cos\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

oder

$$\sin \frac{1}{2} z = \sin \frac{\varphi - \delta}{2} \sqrt{1 + \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 \frac{\tau}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi - \delta}{2}}}.$$

Setzen wir

2) $$\frac{\sin \frac{\tau}{2} \sqrt{\cos\varphi \cos\delta}}{\sin \frac{\varphi - \delta}{2}} = \operatorname{ctg} \mu,$$

so wird:

$$\sin \frac{1}{2} z = \sin \frac{\varphi - \delta}{2} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \mu},$$

3) $$\sin \frac{1}{2} z = \frac{\sin \frac{\varphi - \delta}{2}}{\sin \mu}.$$

Unter Umständen kann es viel günstiger sein, mit dem $\cos \mu$ zu rechnen. Wir können das leicht erreichen, wenn wir in 3) für $\frac{1}{\sin \mu}$ seinen Ausdruck aus Gleichung 2) einsetzen. Es wird dann:

4) $$\sin \frac{1}{2} z = \frac{\sin \frac{\tau}{2} \sqrt{\cos\varphi \cos\delta}}{\cos \mu}.$$

Verfolgen wir den letzteren Ausdruck weiter, so stellt sich die Rechnung folgendermaassen.

Es wird erst ctg μ aus Gleichung 2) berechnet, daraus cos μ und dann nach der Gleichung 4) z selbst.

Die Fehler, die in den der Tafel entnommenen Logarithmen stecken, seien nun der Reihe nach folgende:

in $\log\sin\frac{1}{2}\tau$	der	Fehler:	f_1,
„ $\log\cos\varphi$	„	„	f_2,
„ $\log\cos\delta$	„	„	f_3,
„ $\log\sin\frac{\varphi-\delta}{2}$	„	„	f_4,
„ $\log\operatorname{ctg}\mu$	„	„	f_5*),
„ $\log\cos\mu$	„	„	f_6,
„ $\log\sin\frac{1}{2}z$	„	„	f_7.

Es folgt dann aus Gleichung 2):

$$f(\log\operatorname{ctg}\mu) = f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3 - f_4,$$

und nach Formel 5 in Serie B':

$$f''(\mu) = -\frac{r''}{2m}\sin 2\mu\left\{f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3 - f_4 - f_5\right\}.$$

Ferner ergiebt Formel 3 aus Serie A':

$$f(\log\cos\mu) = \sin^2\mu\left\{f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3 - f_4 - f_5\right\} + f_6,$$

so dass schliesslich für $\sin\frac{1}{2}z$ folgt:

$$f\left(\log\sin\frac{1}{2}z\right) = f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3 - \sin^2\mu\left\{f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3 - f_4 - f_5\right\} - f_6$$
$$= \cos^2\mu\left\{f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3\right\} + \sin^2\mu\left\{f_4 + f_5\right\} - f_6.$$

Wenden wir nun die Formel 2 aus Serie B' an, um den Fehler in z zu erhalten, so wird dieser:

---

*) Die Maximalgrenze von f_5 ist immer 50, denn steht der gefundene Logarithmus gerade in der Tafel, dann ist das f_5 eben der Abkürzungsfehler dieses Tafellogarithmus, steht er aber nicht in der Tafel, so wäre eigentlich $f_5 = (1-\varepsilon)f_1' + \varepsilon f_2' + f_3'$, wo f_1' und f_2' die Fehler der ihn umgebenden Tafellogarithmen sind (siehe pag. 4); das f_3' — sein eigener Abkürzungsfehler fällt aber hier mit dem durch die vorangegangene Rechnung entstandenen Fehler $f(\log\operatorname{ctg}\mu)$, der sich aus den f_1 bis f_4 ergibt, zusammen. Ebenso verhält es sich mit f_7.

$$f''(z) = 2f''\left(\frac{1}{2}z\right) = \frac{2r''}{m}\operatorname{tg}\frac{1}{2}z\left\{\cos^2\mu\left(f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \frac{1}{2}f_3\right) + \right.$$
$$\left. + \sin^2\mu\,(f_4 + f_5) - (f_6 + f_7)\right\}.$$

Eine nähere Betrachtung dieses Resultates wollen wir verschieben, bis wir unsere Hauptaufgabe gelöst haben. Es sei nur erwähnt, dass wir den Maximalfehler der Zenithdistanz schon jetzt finden können, indem wir die einzelnen f ihrem Maximalwerth gleich setzen. Es ist der Maximalwerth von f_1, f_2, f_3, f_4 und f_6 bei 5. stelliger Rechnung z. B. gleich 1 Einheit der fünften Stelle, der von f_5 und f_7 (siehe Anmerkung auf pag. 21) gleich $\frac{1}{2}$ Einheit der fünften Dezimale.

Cap. 7.

Wir haben bisher gefunden, dass sich der Gesammtfehler des Resultates einer logarithmischen Rechnung generell in der Form:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_\nu f_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu f_\mu$$

darstellt.

Hierbei sind die α Zahlenkoeffizienten, die man in jedem einzelnen Falle ähnlich, wie in dem Beispiel im vorigen Kapitel berechnen kann, während die f unbestimmt sind und, wenn wir sie uns für den Fall interpolirter Logarithmen entsprechend den Erörterungen auf pag. 8 Cap. 2 in ihre Bestandtheile zerlegt denken, alle Werthe zwischen + 50 und — 50 gleich γ Einheiten der $(n+2)$ten Dezimale bei n stelliger Rechnung annehmen können. Der Fehler des Resultates muss folglich zwischen 0 und $\gamma \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu$ liegen oder, wenn wir zur Abkürzung $\sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu = s$ setzen, zwischen 0 und $s\gamma$.

Es handelt sich nun darum, eine Antwort auf die Frage zu finden, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Fehler in den Grenzen 0 und $\sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu f_\mu$ bleibt, wo $\sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu f_\mu < \gamma \sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu$ ist, oder mit andern Worten: es soll die Proportionalzahl gefunden werden, die

das Verhältniss zwischen der Anzahl der Fehler, die die Grenze $\sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu f_\mu$ nicht überschreiten, und der Anzahl aller Fehler von jeglicher Grösse angibt.

Zu diesem Zwecke müssen wir Summen zu je ν Summanden von der Form $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i f_\varepsilon$ bilden, wo f_ε bedeutet, dass dieser Faktor für jedes Einzelprodukt aus der Reihe der möglichen Elementarfehler f beliebig herausgegriffen werden muss. Es ist dann zu untersuchen, wie viele solcher Kombinationen die Zahl 0 oder sonst eine bestimmte Zahl, die ja immer kleiner als γs sein muss, ergeben.

Bezeichnen wir nun mit $2n+1$ die Anzahl aller möglichen Elementarfehler mit Berücksichtigung des Vorzeichens, so wird sich, da wir mit γ den Maximalfehler ausgedrückt hatten:

für $\alpha_1 f_\varepsilon$ folgende Reihe möglicher Werthe ergeben:

$$-\frac{n}{n}\alpha_1\gamma,\ -\frac{n-1}{n}\alpha_1\gamma,\ -\frac{n-2}{n}\alpha_1\gamma,\ \cdots,\ 0^{*)},\ \cdots,\ +\frac{n-2}{n}\alpha_1\gamma,\ +\frac{n-1}{n}\alpha_1\gamma,\ +\frac{n}{n}\alpha_1\gamma,$$

für $\alpha_2 f_\varepsilon$ folgende Reihe möglicher Werthe ergeben:

$$-\frac{n}{n}\alpha_2\gamma,\ -\frac{n-1}{n}\alpha_2\gamma,\ -\frac{n-2}{n}\alpha_2\gamma,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ +\frac{n-2}{n}\alpha_2\gamma,\ +\frac{n-1}{n}\alpha_2\gamma,\ +\frac{n}{n}\alpha_2\gamma,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

für $\alpha_\nu f_\varepsilon$ folgende Reihe möglicher Werthe ergeben:

$$-\frac{n}{n}\alpha_\nu\gamma,\ -\frac{n-1}{n}\alpha_\nu\gamma,\ -\frac{n-2}{n}\alpha_\nu\gamma,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ +\frac{n-2}{n}\alpha_\nu\gamma,\ +\frac{n-1}{n}\alpha_\nu\gamma,\ +\frac{n}{n}\alpha_\nu\gamma.$$

Streng genommen dürften wir nicht von diesen Reihen ausgehen, da die Maximalwerthe der einzelnen Fehler, also

$$-\frac{n}{n}\alpha_1\gamma,\ +\frac{n}{n}\alpha_1\gamma,\ -\frac{n}{n}\alpha_2\gamma,\ +\frac{n}{n}\alpha_2\gamma,\ \text{u. s. w.}$$

nur die halbe Wahrscheinlichkeit, wie die entsprechenden übrigen Elementarfehler, für sich haben. Denn wir haben ja schon früher auf pag. 10 gesehen, dass der Fehler 50 eben so wie der Fehler 0 bei einem Logarithmus nur die halbe Amplitude, also auch nur die halbe Wahrscheinlichkeit hat, wie die anderen Fehler. Es ist aber auch die Anzahl aller möglichen Fehler eigentlich nicht $2n+1$,

---

*) Dass in derartigen Elementarfehlerreihen die 0 nicht doppelt zu zählen ist, wie häufig behauptet wird, glaube ich in den „Astronomischen Nachrichten" No. 2810 genügend dargelegt zu haben.

sondern $2n$, nämlich 100 (entsprechend den möglichen 100 Endungen eines Logarithmus: 0, 1, 2, ... bis 99), wenn wir als Einheit die zweitnächste Stelle nehmen. Unter der Voraussetzung, dass n sehr gross ist, können wir aber, der Erleichterung der Entwicklungen halber, uns die Inkorrektheit gestatten, den Maximalfehler doppelt zu zählen, müssen dann natürlich als Anzahl der möglichen Fehler $2n+1$ nehmen und nicht $2n$. Sonst würden wir für die grossen Fehleraggregate zu grosse Wahrscheinlichkeiten bekommen. Es wird sich zeigen, dass es, um befriedigende Uebereinstimmung mit der Praxis zu erlangen, genügt, genügt, $2n=100$, also z. B. bei Betrachtung fünfstelliger Logarithmen die siebente Dezimale als Einheit zu nehmen.

Es lässt sich eine bedeutende Vereinfachung der weiteren Rechnung erzielen, wenn wir die Fehleramplitude so eintheilen, dass sich in allen Reihen dieselbe Elementarstufe, nämlich $\frac{\gamma}{n}$ ergiebt, während bei den eben gefundenen Reihen die Elementarperiode zwar in derselben Reihe die gleiche, in verschiedenen aber verschieden ist, nämlich: $\alpha_1\frac{\gamma}{n}$, $\alpha_2\frac{\gamma}{n}$, $\cdots$ bis $\alpha_\nu\frac{\gamma}{n}$. Es ist dies gestattet, wie sich aus folgender Ueberlegung ergibt. Die Elementarfehler f haben doch in allen Reihen dieselbe Bedeutung, können also in gleiche Intervalle $\frac{\gamma}{n}$ getheilt werden und sind auch so getheilt; die Verschiedenheit, die in den Elementarperioden der verschiedenen Reihen existirt, ist durch die Multiplikation mit den im allgemeinen und an und für sich nicht gleichen α hervorgerufen. Diese Verschiedenheit können wir aber dadurch beseitigen, dass wir für die α ein gemeinschaftliches Mass annehmen. Wir erhielten dann eine grössere Anzahl ganz gleicher Reihen. Statt dessen können wir natürlich auch in den vorhandenen Reihen die sämmtlichen Intervalle gleich machen, wodurch wir eine der früheren gleiche Zahl Reihen erhalten, in denen aber nicht wie früher die Anzahl der Glieder dieselbe, sondern eine von dem jeweiligen α abhängige: $2n\alpha_1+1$, $2n\alpha_2+1$, u. s. w. ist. Es ergeben sich so die folgenden Reihen:

$$-\frac{n\alpha_1}{n}\gamma,\ -\frac{n\alpha_1-1}{n}\gamma,\ -\frac{n\alpha_1-2}{n}\gamma, \ldots, 0, \ldots, +\frac{n\alpha_1-2}{n}\gamma,\ +\frac{n\alpha_1-1}{n}\gamma,\ +\frac{n\alpha_1}{n}\gamma,$$
$$-\frac{n\alpha_2}{n}\gamma,\ -\frac{n\alpha_2-1}{n}\gamma,\ -\frac{n\alpha_2-2}{n}\gamma, \ldots, 0, \ldots, +\frac{n\alpha_2-2}{n}\gamma,\ +\frac{n\alpha_2-1}{n}\gamma,\ +\frac{n\alpha_2}{n}\gamma,$$
$$\vdots$$
$$-\frac{n\alpha_\nu}{n}\gamma,\ -\frac{n\alpha_\nu-1}{n}\gamma,\ -\frac{n\alpha_\nu-2}{n}\gamma, \ldots, 0, \ldots, +\frac{n\alpha_\nu-2}{n}\gamma,\ +\frac{n\alpha_\nu-1}{n}\gamma,\ +\frac{n\alpha_\nu}{n}\gamma.$$

Wenn nun verlangt wird, die Anzahl der Kombinationen zu ν Gliedern zu suchen, die in der oben angegebenen Weise gebildet etwa die Summe p geben, so können wir die Aufgabe so stellen, dass wir den Koeffizienten der Potenz x^p suchen, wie er sich aus dem Produkt der obigen Reihen ergibt, nachdem wir sie durch Summen von Potenzen ersetzt haben, deren Basis immer x ist, während die Glieder der obigen Reihen die Stelle der Exponenten einnehmen.

Wir müssen also den Koeffizienten der Potenz x^p suchen durch Entwicklung des Produktes:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}\left\{x^{-\frac{n\alpha_\mu}{n}\gamma}+x^{-\frac{n\alpha_\mu-1}{n}\gamma}+x^{-\frac{n\alpha_\mu-2}{n}\gamma}+\cdots+x^0+\cdots+x^{+\frac{n\alpha_\mu-2}{n}\gamma}+\right.$$
$$\left.+x^{+\frac{n\alpha_\mu-1}{n}\gamma}+x^{+\frac{n\alpha_\mu}{n}\gamma}\right\}$$
$$=\prod_{\mu=1}^{\nu}\left\{x^{-\alpha_\mu\gamma}+x^{-\alpha_\mu\gamma+\frac{\gamma}{n}}+x^{-\alpha_\mu\gamma+2\frac{\gamma}{n}}+\cdots+x^{-\alpha_\mu\gamma+n\alpha_\mu\frac{\gamma}{n}}+\cdots+\right.$$
$$\left.+x^{-\alpha_\mu\gamma+(2n\alpha_\mu-2)\frac{\gamma}{n}}+x^{-\alpha_\mu\gamma+(2n\alpha_\mu-1)\frac{\gamma}{n}}+x^{-\alpha_\mu\gamma+2n\alpha_\mu\frac{\gamma}{n}}\right\}$$
$$=\prod_{\mu=1}^{\nu}x^{-\alpha_\mu\gamma}\left\{1+x^{\frac{\gamma}{n}}+x^{2\frac{\gamma}{n}}+\cdots+x^{n\alpha_\mu\frac{\gamma}{n}}+\cdots+x^{(2n\alpha_\mu-2)\frac{\gamma}{n}}+\right.$$
$$\left.+x^{(2n\alpha_\mu-1)\frac{\gamma}{n}}+x^{2n\alpha_\mu\frac{\gamma}{n}}\right\}$$
$$=x^{-\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu\gamma}\prod_{\mu=1}^{\nu}\left\{1+x^{\frac{\gamma}{n}}+x^{2\frac{\gamma}{n}}+\cdots+x^{n\alpha_\mu\frac{\gamma}{n}}+\cdots+x^{2n\alpha_\mu\frac{\gamma}{n}}\right\}.$$

Wir wollen nun, indem wir vom ersten Faktor absehen, untersuchen, welchen Koeffizienten das Glied

$$z^t$$

erhält, nachdem wir nämlich:

$$x^{\frac{\gamma}{n}} = z$$

und

$$2n\alpha_\mu + 1 = u_\mu$$

gesetzt haben.

Es wird dann:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}\left\{1 + x^{\frac{\gamma}{n}} + x^{2\frac{\gamma}{n}} \cdots + x^{n\alpha_\mu\frac{\gamma}{n}} + \cdots + x^{2n\alpha_\mu\frac{\gamma}{n}}\right\}$$

$$= \prod_{\mu=1}^{\nu}\left\{1 + z + z^2 + \cdots + z^{u_\mu - 1}\right\}$$

$$= \prod_{\mu=1}^{\nu}\left\{(1 - z^{u_\mu})\ (1 - z)^{-1}\right\}$$

$$= (1-z)^{-\nu}\prod_{\mu=1}^{\nu}(1 - z^{u_\mu}).$$

Entwickeln wir nun $(1-z)^{-\nu}$ nach der Formel:

$$(1-z)^r = 1 - rz + \frac{r(r-1)}{2!}z^2 - \cdots$$
$$= 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_t z^t \cdots,$$

woselbst ist:

$$A_t = \frac{r(r-1)\ (r-2)\ldots(r-t+1)}{t!}(-1)^t$$

Setzen wir $r = \nu$, so ändern sich in der Entwicklung nur die Faktoren A, indem:

$$A_t = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+t-1)}{t!} = (\nu+t-1)_t$$

wird. Andererseits ist:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}(1 - z^{u_\mu}) = 1 - (z^{u_1} + z^{u_2} + z^{u_3} + \cdots) + (z^{u_1+u_2} + z^{u_1+u_3} + \cdots$$
$$+ z^{u_2+u_3} + \cdots + z^{u_{\nu-1}+u_\nu}) - \cdots + (-1)^\nu z^{u_1+u_2+\cdots+u_\nu}.$$

Also erhalten wir als definitiven Koeffizienten C_t der Potenz $z^t = x^{t\frac{\gamma}{n}}$, also auch der Potenz $x^{t\frac{\gamma}{n} - \sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu\gamma} = x^p$:

$$C_t = A_t - (A_{t-u_1} + A_{t-u_2} + \cdots) + (A_{t-u_1-u_2} + A_{t-u_1-u_3} + \cdots +$$
$$+ A_{t-u_2-u_3} + \cdots + A_{t-u_{\nu-1}-u_\nu}) - \cdots + (-1)^\nu A_{t-u_1-u_2-\cdots-u_\nu}.$$

Bezeichnen wir mit $s_\mu u$ die Summe von μ verschiedenen Ele-

menten der u Reihe, so ist zu bemerken, dass in dem Ausdruck für C_t nur diejenigen Glieder zu nehmen sind, in denen $t \geqq s_\mu u$ ist, da in den beiden z Reihen nur positive Potenzen vorkommen.

Nun ist allgemein:

$$(\nu + t - 1)_t = (\nu + t - 1)_{\nu-1}.$$

denn es ist:

$$(\nu + t - 1)_t = \frac{(\nu + t - 1)!}{t!(\nu - 1)!} = \frac{(t+1) \ldots (\nu + t - 1)}{(\nu - 1)!} = (\nu + t - 1)_{\nu-1}.$$

Bei Anwendung dieser Formel nehmen die A folgende Gestalt an:

$$A_{t-s_\mu u} = (\nu + t - s_\mu u - 1)_{\nu-1}.$$

In C_t können wir nunmehr $\frac{1}{(\nu-1)!}$ als Faktor voranstellen und erhalten:

$$C_t = \frac{1}{(\nu-1)!}\{B_t - (B_{t-u_1} + B_{t-u_2} + \cdots) +$$
$$+ (B_{t-u_1-u_2} + B_{t-u_1-u_3} + \cdots + B_{t-u_2-u_3} + \cdots) - \cdots + (-1)^\nu B_{t-s_\nu u}\}$$
$$= \frac{1}{(\nu-1)!} \sum_{\mu=0}^{\nu}{}'^{*)} B_{(t-s_\mu u)},$$

wo die B durch die Gleichung:

$$B_{t-s_\mu u} = (t - s_\mu u + 1)(t - s_\mu u + 2) \ldots (t - s_\mu u + \nu - 1)$$

definirt werden.

Wenn wir jetzt von den u wieder auf die wirklichen Fehlermultiplikatoren α (siehe pag. 22 Cap. 7 und pag. 26 Cap. 7) zurückgehen durch ihre Definitionsgleichung:

$$2n\alpha_\mu + 1 = u_\mu,$$

so wird es sich empfehlen, für t eine neue Variable m durch die Gleichung:

$$t = 2nm \text{ oder } m = \frac{t}{2n}$$

einzuführen. Da C_t der Koefficient der Potenz $x^p = x^{t\frac{1}{n} - s}$ ist (pag. 26 Cap. 7), so ist m als Funktion von p durch die Gleichung:

---

*) Es ist zu bemerken, dass dieses Summenzeichen Σ' gewissermaassen eine doppelte Summation zu bezeichnen hat, indem zu jedem speciellen μ eine ganze Reihe von Summanden B gehören.

$$m = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{\gamma} + s\right)$$

bestimmt.

Es wird nun, wenn wir der Bezeichnung $s_\mu u$ (Cap. 7, pag. 26) entsprechend mit $s_\mu \alpha$ die Summe von μ verschiedenen α bezeichnen:

$$t - s_\mu u = 2nm - 2n s_\mu \alpha - \mu,$$

und demnach

$$B_{t-s_\mu u} = (2nm - 2ns_\mu\alpha - \mu + 1)(2nm - 2ns_\mu\alpha - \mu + 2)\cdots(2nm - 2ns_\mu\alpha - \mu + \nu - 1)$$

$$= (2n)^{\nu-1}\left(m - s_\mu\alpha + \frac{1-\mu}{2n}\right)\left(m - s_\mu\alpha + \frac{2-\mu}{2n}\right)\cdots\left(m - s_\mu\alpha + \frac{\nu-1-\mu}{2n}\right)$$

$$= (2n)^{\nu-1}(m - s_\mu\alpha)^{\nu-1} + (2n)^{\nu-1}(m - s_\mu\alpha)^{\nu-2}\sum_{\varkappa=2}^{\nu}\frac{\varkappa-1-\mu}{2n} + \cdots$$

$$= (2n)^{\nu-1}(m - s_\mu\alpha)^{\nu-1} + (\nu-1)\frac{\nu-2\mu}{2}(2n)^{\nu-2}(m - s_\mu\alpha)^{\nu-2} + \cdots$$

Während sich Bremiker in seinen entsprechenden Entwicklungen, ohne die gegenseitigen Grössenverhältnisse der Glieder zu diskutiren, einfach auf das erste Glied beschränkt, wollen wir vorläufig die Glieder zweiter Ordnung noch mitnehmen, um dann zu untersuchen, inwieweit sie das Gesammtresultat beeinflussen. Thun wir das, so wird:

$$C_t = \frac{(2n)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\sum_{\mu=0}^{\nu}{}' \left\{(m - s_\mu\alpha)^{\nu-1} + \frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-2\mu}{2n}(m - s_\mu\alpha)^{\nu-2}\ldots\right\}$$

der Koeffizient der Potenz:

$$x^p = x^{\left(\frac{t}{n} - s\right)\gamma} = x^{(2m - s)\gamma}.$$

Mit anderen Worten:

C_t ist die Zahl, die angiebt, wie oft unter allen möglichen Kombinationen der $\Sigma\alpha f$ diejenige vorkommt, welche das Resultat: $(2m - s)\gamma$ liefert.

Nun ist nach einem Hauptsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich dem Quotienten der Anzahl der günstigen Fälle C_t dividirt durch die Anzahl aller möglichen Fälle M: $\frac{C_t}{M}$. Die Anzahl M aller möglichen Fälle ist aber hier offenbar gleich dem Produkt der Anzahl der Glieder in den einzelnen Reihen im Cap. 7 (pag. 25), also:

$$M = (2n\alpha_1 + 1)(2n\alpha_2 + 1)(2n\alpha_3 + 1) \ldots (2n\alpha_\nu + 1)$$
$$= (2n)^\nu \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_\nu + (2n)^{\nu-1}\left\{\alpha_2 . \alpha_3 \ldots \alpha_\nu + \alpha_1 . \alpha_3 \ldots \alpha_\nu + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\nu-1}\right\} + \cdots$$

Gewöhnlich — und so verfährt auch Bremiker — begnügt man sich mit dem ersten Gliede, indessen wollen wir das zweite Glied vorläufig mitnehmen, da wir auch in C_t bis zu den Gliedern zweiter Ordnung gegangen sind.

Bilden wir nun den Quotienten aller günstigen durch die möglichen Fälle, so erhalten wir als Wahrscheinlichkeit V_p, dass der Gesammtfehler gleich $p = (2m - s)\gamma$ wird:

$$V_p = \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\nu}{}' \left\{(m - s_\mu \alpha)^{\nu-1} + \frac{\nu - 1}{2} \cdot \frac{\nu - 2\mu}{2n}(m - s_\mu \alpha)^{\nu-2} \ldots\right\}}{2n(\nu - 1)! \prod\limits_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu + (\nu - 1)! \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \left[\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu}{\alpha_\mu}\right] \ldots}$$

Cap. 8.

Wollen wir jetzt einen Ausdruck W_m für die Anzahl von Kombinationen, die zwischen bestimmten Grenzen liegen, finden, so müssen wir alle V_p für die zwischen den beiden Grenzen liegenden p addiren.

Beziehen wir die Grenzen auf m und gehen wir von $m = 0$ bis $m = m$, d. h. von $p = -s\gamma$ bis $p = (2m - s)\gamma$ und bedenken wir, dass m durch die Gleichung $m = \frac{t}{2n}$, in der t alle ganzzahligen Werthe annehmen kann, eingeführt war, so ergibt sich als Intervall $\frac{1}{2n}$. Wir erhalten also an Stelle eines einzelnen Gliedes $(m - s_\mu \alpha)^{\nu-1}$ in V_p eine Summe von Gliedern:

$$\left(\frac{0}{2n} - s_\mu \alpha\right)^{\nu-1} + \left(\frac{1}{2n} - s\ \alpha\right)^{\nu-1} + \left(\frac{2}{2n} - s_\mu \alpha\right)^{\nu-1} + \cdots + \left(\frac{t}{2n} - s_\mu \alpha\right)^{\nu-1} =$$
$$= \sum_{x=0}^{t} \left(\frac{x}{2n} - s_\mu \alpha\right)^{\nu-1}.$$

Diese Summe können wir aber auf die Summe eines bestimmten Integrals und einer Reihe von Gliedern höherer Ordnung zurückführen nach der Formel:

$$\sum_{x=0}^{t} f(x) = \frac{1}{h}\int_0^{t+h} f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(t+h) - f(o)] + \frac{1}{12}h[f'(t+h) - f'(o)]$$
$$- \frac{1}{720}h^3[f'''(t+h) - f'''(o)] + \cdots$$

Hierbei bedeutet h das Inkrement der Unbekannten, welches in der obigen Summe gleich 1 ist. Unseren früheren Vernachlässigungen entsprechend wird es genügen, nur das zweite Glied von der Ordnung $\nu-1$ mitzunehmen, sodass wir setzen können:

$$\sum_{x=0}^{t}\left(\frac{x}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu-1} = \int_0^{t+1}\left(\frac{x}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu-1} dx - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{t+1}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu-1} - \left(\frac{o}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu-1}\right]$$
$$= \frac{2n}{\nu}\left(\frac{t+1}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{t+1}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu-1},$$

wenn wir nämlich berücksichtigen, dass alle Glieder mit negativer Basis fortzulassen sind (vergl. Cap. 7 pag. 27).

An Stelle jedes Gliedes zweiter Ordnung in V_p tritt entsprechend eine Reihe von Gliedern:

$$\frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-2\mu}{2n}\sum_{x=0}^{t}\left(\frac{x}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu-2} = \frac{\nu-1}{2}\cdot\frac{\nu-2\mu}{2n}\cdot\frac{2n}{\nu-1}\left(\frac{t+1}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu-1}\cdots$$

Wir erhalten demnach, wenn wir wieder nur bis zu den Gliedern $\nu-1$. Ordnung gehen an Stelle der obigen Summe Σ' in V_p für W_m eine Summe:

$$\sum_{\mu=0}^{\nu}{}'\left\{\frac{2n}{\nu}\left(\frac{t+1}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu} + \frac{\nu-2\mu-1}{2}\left(\frac{t+1}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu-1}\cdots\right\},$$

so dass wir bei Zurückführung von t auf m — es war $t = 2nm$ — als W a h r s c h e i n l i c h k e i t s a u s d r u c k z w e i t e r N ä h e r u n g d a f ü r, d a s s d e r F e h l e r i n d e n G r e n z e n $-s\gamma$ und $(2m - s)\gamma$ l i e g t, erhalten:

$$1)\qquad W_m = \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\nu}{}'\left\{\left(m + \frac{1}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu} + \frac{\nu(\nu-2\mu-1)}{4n}\left(m + \frac{1}{2n} - s_\mu\alpha\right)^{\nu-1}\right\}}{\nu!\left\{\prod\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu + \frac{1}{2n}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu}{\alpha_\mu}\right\}}.$$

Hierin sind nur diejenigen Glieder mitzunehmen, bei denen $m > s_\mu\alpha$ ist.

Lassen wir alle Glieder zweiter Ordnung fort und schreiben wir das Produkt und die Summe in Beziehung auf μ in Reihenform, so kommen wir auf den Bremikerschen Ausdruck erster Näherung:

$$2)\quad W_m = \frac{1}{\nu!\,\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_\nu}\Big\{m^\nu - \Sigma(m - s_1\alpha)^\nu + \Sigma(m - s_2\alpha)^\nu - \cdots + \\ + (-1)^\nu \Sigma(m - s_\nu\alpha)^\nu\Big\}.$$

Die Funktion W_m muss nun aber die Eigenschaft haben, für $m = s$ gleich 1 zu werden, da doch der Fehler zwischen $-s\gamma$ und $+s\gamma$ liegen muss. In der That ergibt die Rechnung das gewünschte Resultat, z. B. wird für die Addition zweier Tafellogarithmen, also $\nu = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu = 2$, $\prod_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu = 1$, $\sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{\prod_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu}{\alpha_\mu} = 2$, $s_1\alpha = 1$ mit der Häufigkeitszahl 2 und $s_2\alpha = 2$ mit der Häufigkeitszahl 1, $n = 50$:

$$W_m = \frac{1}{2(1 + \frac{2}{100})}\Big\{2^2.01 - 2 \cdot 1^2.01 + \frac{1}{100} \cdot 2.01 + \frac{2}{100} \cdot 1.01 - \frac{3}{100} \cdot 0.01\Big\} = \\ = \frac{2.04}{2.04} = 1.$$

Ferner muss den früheren Erörterungen gemäss die Wahrscheinlichkeit eines negativen Fehlers dieselbe sein, wie für den gleich grossen positiven. Auch wären wir zu denselben Ausdrücken V_p und W_m für die Fehlergrössen $p = \{s - 2m\}\gamma$, resp. die Fehlergrenzen $+s\gamma$ und $+\{s - 2m\}\gamma$ gelangt, wenn wir im vorigen Capitel statt nach steigenden Potenzen nach fallenden entwickelt hätten.

Bevor wir mit der Vergleichung unserer Näherungsformeln mit der Praxis beginnen, wollen wir noch eine Zusammenstellung geben, aus der sich in praktischen Fällen die Gestalt der betreffenden W Funktion leicht ergeben dürfte. Es wird:

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler des Resultats einer logarithmischen Rechnung

1) in den Grenzen $+s\gamma$ und $(s-2m)\gamma$ liegt, ist W_m,
2) „ „ „ $-s\gamma$ „ $(2m-s)\gamma$ „ „ W_m,
3) „ „ „ $-s\gamma$ „ $+s\gamma$ „ „ $W_s = 1$,

4) in den Grenzen 0 und $\pm s\gamma$ liegt, ist $W_{\frac{1}{2}s} = \frac{1}{2}$,

5) „ „ „ 0 „ $\pm(s-2m)\gamma$ „ „ $W_{\frac{1}{2}s} - W_m = \frac{1}{2} - W_m$,

6) „ „ „ $+(s-2m)\gamma$ „ $-(s-2m)\gamma$ „ „ $2(W_{\frac{1}{2}s} - W_m) = 1 - 2W_m$,

7) Für $m > s$ bleibt $W_m = W_s = 1$.

Cap. 9.

Nunmehr wollen wir sehen, wie die theoretischen Formeln erster und zweiter Näherung unter einander und mit den Ergebnissen der Erfahrung, also der Rechnung übereinstimmen. Zu diesem Zweck entnehmen wir wiederholt je 20 verschiedene Logarithmen direkt den fünfstelligen Tafeln (August), bilden ihre Summe und vergleichen diese mit der entsprechenden Summe, die wir aus siebenstelligen Logarithmen (Bremiker) erhalten. Die Differenzen bilden wir im Sinne von Fehlern der 5. stelligen Tafeln (siehe Cap. 2). Da jeder einzelne der direkt den Tafeln entnommenen 5 stelligen Logarithmen um 50 Einheiten der siebenten Dezimale fehlerhaft sein kann, und da sich alle 20 Fehler abgesehen vom Vorzeichen einfach addiren, so beträgt der Maximalfehler $s\gamma$ offenbar 1000 Einheiten der siebenten Stelle. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die singulären Stellen in den Tafeln (s. Cap. 2 pag. 10) unberücksichtigt bleiben. Es wird dann in den einzelnen Untersuchungsreihen abgezählt, wie viel Fehler zwischen 0 und 100, 100 und 200, 200 und 300 u. s. w. Einheiten der siebenten Dezimale liegen. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, in der das erste Beispiel von 20 Summen von je 20 Logarithmen der Abhandlung von Bremiker entnommen, das zweite von 150 solchen Summen aus einer gemeinsamen Arbeit des unter Leitung der Herren Prof. Foerster und Prof. Tietjen stehenden astronomischen Seminars hervorgegangen, das dritte von 270 Summen vom Verfasser berechnet ist. Bei dem ersten Beispiel von Bremiker ist zu bemerken, dass derselbe immer 20 direkt aufeinanderfolgende Logarithmen zu einer Summe vereinigte, wodurch die Nexuslosigkeit der Differenzen etwas getrübt sein kann. Gegenübergestellt

sind dann diesen empirischen Werthen die aus der Theorie folgenden, und zwar habe ich diese erstens nach der alten Bremiker'schen Formel für W_m, in der die Glieder zweiter Ordnung überhaupt vernachlässigt sind (pag. 31), dann mit Berücksichtigung derselben nach der oben entwickelten Formel (pag. 30) berechnet.

Die Abweichung der Werthe in der ersten Kolumne von den entsprechenden in der Bremikerschen Abhandlung rührt daher, dass ich bei der theoretischen Berechnung nicht wie Bremiker die Intervalle 0—100, 100—200 u. s. w., sondern 0—100.5, 100.5—200.5 u. s. w. genommen habe. Denn thatsächlich wird in der Praxis ein Fehleraggregat von der wahren Grösse 100.499 ... noch zu 100, dagegen erst ein solches von der Grösse 100.500 zu 101 gezählt.

Die theoretischen Berechnungen sind nun in folgender Weise auszuführen:

Es ist in Einheiten der siebenten Stelle:

$$\gamma = 50, \ \nu = 20, \ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = 1, \ n = 50.$$

Demnach wird

$s_1 \alpha = 1$, die Anzahl gleich 20,

$s_2 \alpha = 2$ „ „ „ $\frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2}$,

$s_\nu \alpha = s = 20$, „ „ „ 1, $\prod\limits_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu = 1$, $\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \frac{\prod\limits_{\mu=1}^{\nu} \alpha_0}{\alpha_\mu} = 20.$

Daraus ergiebt sich als Ausdruck erster Näherung:

$$1)\ W_m = \frac{1}{20!}\left\{m^{20} - 20(m-1)^{20} + \frac{20 \cdot 19}{2!}(m-2)^{20} - \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!}(m-3)^{20} + \cdots\right\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Gesammtfehler ohne Rücksicht auf das Zeichen zwischen 0 und $1000 - 100_m$ liegt, ist dann $1 - 2\ W_m$. Setzen wir hier der Reihe nach $m = 8.995; = 7.995; = 6.995; \ldots; = 0.995$, berechnen $1 - 2\ W_m$ und multipliziren die erhaltene Zahl mit 100, so bekommen wir in Prozenten ausgedrückt, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Fehler zwischen 0 und 100.5; 0 und 200.5; u. s. w. — also durch Subtraktion auch mit welcher Wahrscheinlichkeit der Fehler zwischen 100.5 und 200.5; 200.5 und 300.5 u. s. w. liegt.

Der zweiten Berechnung liegt der Ausdruck zu Grunde:

$$W_m = \frac{1}{20!(1+\frac{1}{5})}\Bigg[\Bigg\{\left(m+\frac{1}{100}\right)^{20} - 20\left(m+\frac{1}{100}-1\right)^{20} + \frac{20\cdot 19}{2!}\left(m+\frac{1}{100}-2\right)^{20} -$$
$$- \frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!}\left(m+\frac{1}{100}-3\right)^{20} + \cdots\Bigg\} + \frac{1}{10}\Bigg\{19\left(m+\frac{1}{100}\right)^{19} -$$
$$- 17\cdot 20\left(m+\frac{1}{100}-1\right)^{19} + 15\cdot\frac{20\cdot 19}{2!}\left(m+\frac{1}{100}-2\right)^{19} -$$
$$- 13\cdot\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3!}\left(m+\frac{1}{100}-3\right)^{19} + \cdots\Bigg\}\Bigg].$$

Nach diesen Prinzipien ergab sich:

I.

zwischen:	0 bis 100.5	100.5 bis 200.5	200.5 bis 300.5	300.5 bis 400.5	400.5 bis 500.5	500.5 bis 1000
1) aus 20 Summen { von je 20 Logarithmen, dass von den Fehleraggregaten liegen	65.0%	20.0	10.0	5.0	0	0
2) aus 150 Summen desgl.	66.0	24.0	8.7	1.3	0	0
3) aus 270 Summen desgl.	64.4	30.8	4.4	0.4	0	0
4) aus 1) + 2) + 3), also 440 Summen*) desgl.	64.9	28.0	6.1	1.0	0	0
5) aus 2) + 3), also 420 Summen desgl.	65.0	28.4	5.9	0.7	0	0

II.

zwischen:	0 bis 100.5	100.5 bis 200.5	200.5 bis 300.5	300.5 bis 400.5	400.5 bis 500.5	500.5 bis 1000
1) Nach Formel 1) (1. Näherung) sollten liegen	56.1%	31.8	10.2	1.7	0.2	0
2) Nach Formel 2) (2. Näherung) desgl.	55.4	32.1	10.5	1.8	0.2	0

Das Ergebnis ist also Folgendes:

I) Die empirischen Resultate zeigen unter einander eine recht gute Uebereinstimmung, nur dass im allgemeinen, wie ja zu erwarten war, die Relativzahl der grösseren Fehleraggregate unverkennbar kleiner wird, je mehr Beispiele zur Ableitung der Relativzahlen gedient haben.

II) Die Vergleichung der beiden theoretischen Reihen zeigt, dass man in der That, wie Bremiker es gemacht hat, die Glieder zweiter Ordnung im Zähler und Nenner fortlassen kann, ohne zu wesentlich anderen Werthen zu kommen.

Wir wollen aber auch sehen, ob dasselbe für kleine Werthe

*) Natürlich mit Berücksichtigung der Anzahl der Beobachtungen.

von ν zutrifft. Wir wollen für $\nu = 5$, — das ist wohl der kleinste Werth, den ν in der Praxis annimmt — die Wahrscheinlichkeit $1-2\ W_m$, dass bei der einfachen Addition von 5 Logarithmen (Maximalfehler 250) der Gesammtfehler zwischen 0 und 50.5 liegt, nach beiden Formeln berechnen.

Es wird:

1) $$W_m = \frac{1}{120}\{1.995^5 - 5 \cdot 0.995^5\}$$

2) $$W_m = \frac{1}{126}\{2.005^5 - 5 \cdot 1.005^5 + 10 \cdot 0.005^5 + \frac{1}{40}(4 \cdot 2.005^4 - 10 \cdot 1.005^4)\}$$

und daraus:

1) $1-2\ W_m = 55.5\ \%$ in erster,

2) $1-2\ W_m = 54.5\ \%$ in zweiter Näherung.

Es ergiebt sich demnach der Unterschied zwischen beiden Näherungen als so gering, dass es zwecklos wäre, fernerhin die theoretisch genaueren Formeln anzuwenden.

III. Die Uebereinstimmung zwischen den theoretischen und den empirischen Werthen ist eine genügende, wenn auch offenbar in der Praxis die kleineren Fehleraggregate noch etwas mehr, als in der Theorie, die grösseren überwiegen. Bei dem Beispiel 3) haben wir ja schon früher (Cap. 2 pag. 14) das Eintreten dieser Erscheinung vorausgesehen, wenn auch nicht zu erwarten war, dass sie sich so stark zeigen würde. Dieser Umstand, sowie der fernere, dass dieselbe Erscheinung auch in den anderen Beispielen auftritt, legt die Vermuthung nahe, dass die Theorie eventuell in ihren Grundlagen noch irgend einer Modifikation bedarf, um den Thatsachen sich besser anzupassen. Theilweise dürfte die Erscheinung ihren Grund in der doppelten Zählung des Maximalfehlers (Cap. 7 pag. 23 und 24) finden, wie des Näheren später (Cap. 11 pag. 49 und 50) ausgeführt werden wird. Nach diesen Ergebnissen werden wir also den theoretischen Berechnungen folgenden Ausdruck zu Grunde legen können:

$$W_m = \frac{1}{\nu!\prod\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu}\sum_{\mu=0}^{\nu}{}'\{m - s_\mu\alpha\}^\nu \quad \text{und} \quad V_p = \frac{1}{2n(\nu-1)!\prod\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu}\sum_{\mu=0}^{\nu}{}'\{m - s_\mu\alpha\}^{\nu-1}.$$

Cap. 10.

Mit Hülfe der bisherigen Resultate könnten wir nun Formeln für den Potenzmittelwerth 0. Ordnung, also den Zentralwerth (wahrscheinlichen Fehler) und den Potenzmittelwerth 1. Ordnung (mittleren Fehler) entwickeln, indessen ist die Form unserer Wahrscheinlichkeitsausdrücke so komplizirt und unbequem, dass die Berechnung derselben sehr zeitraubend, bei einigermassen grossem ν fast zur Unmöglichkeit wird.

Wir wollen daher erst versuchen, diese auf Kosten der äussersten Strenge auf eine einfachere und bequemere Form zu bringen.

Wir können dabei von den ursprünglichen Reihen im Cap. 7 (pag. 23) ausgehen, denen gemäss sich als Wahrscheinlichkeit, wie oft der Fehler $t\frac{\gamma}{n}$ unter allen möglichen vorkommt, der Koeffizient desjenigen Gliedes des Produktes:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}\left\{x^{-\frac{n}{n}\alpha_\mu\gamma}+x^{-\frac{n-1}{n}\alpha_\mu\gamma}+\cdots+x^0+\cdots+x^{+\frac{n-1}{n}\alpha_\mu\gamma}+x^{+\frac{n}{n}\alpha_\mu\gamma}\right\}$$

ergibt, welches $t\frac{\gamma}{n}$ zum Exponenten hat.

Setzen wir:

$$x^{\frac{\gamma}{n}}=e^{zi},$$

wo i die imaginäre Einheit $+\sqrt{-1}$ bedeuten soll, so erhalten wir das Produkt:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}\left\{e^{-n\alpha_\mu zi}+e^{-(n-1)\alpha_\mu zi}+\cdots+e^0+\cdots+e^{+(n-1)\alpha_\mu zi}+e^{+n\alpha_\mu zi}\right\}=\prod_{\mu=1}^{\nu}\varphi_\mu(z),$$

dabei ist:

$$\begin{aligned}\varphi_\mu(z)&=e^{-n\alpha_\mu zi}+e^{-(n-1)\alpha_\mu zi}+\cdots+e^0+\cdots+e^{+(n-1)\alpha_\mu zi}+e^{+n\alpha_\mu zi}\\&=e^{-n\alpha_\mu zi}+e^{-(n\alpha_\mu-1)zi}+\cdots+e^0+\cdots+e^{+(n\alpha_\mu-1)zi}+e^{+n\alpha_\mu zi},\end{aligned}$$

wenn wir nämlich wieder, wie bei unserer früheren Entwicklung (Cap. 7 pag. 24 u. 25), die einzelnen Fehleramplituden $\alpha_1\gamma$, $\alpha_2\gamma$ u. s. w. so eintheilen, dass das Intervall zwischen zwei benachbarten Elementarfehlern für alle Amplituden dasselbe wird. Wir

müssen nur beachten, dass dementsprechend auch wieder die Anzahl sämmtlicher möglichen Elementarfehler wird:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}(2n\alpha_\mu+1).$$

Nun ist weiter:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}\varphi_\mu(z)=\sum_{t=-ns}^{+ns}k_t e^{tzi}\text{*)}$$

Es giebt also k_t an, wie oft eine Fehlersumme $t\frac{\gamma}{n}$ herauskommt, $\sum\limits_{t=-nc}^{+nc}k_t$ dagegen die Zahl der Fälle, wo der Gesammtfehler in den Grenzen $-nc\frac{\gamma}{n}=-c\gamma$ und $+c\gamma$ liegt.

Um diese $\sum\limits_{t=-nc}^{+nc}k_t$ zu berechnen, wollen wir die ganze letzte Gleichung mit einer Potenz

$$e^{-t'zi}$$

multipliziren, so zwar, dass nunmehr nur noch Potenzen zwischen e^{-nczi} und e^{+nczi} vorkommen. Wenn wir ausserdem zwischen den Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ in Bezug auf z integriren, so folgt:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\prod_{\mu=1}^{\nu}\varphi_\mu(z)e^{-t'zi}\,dz=\sum_{t=-nc}^{+nc}\left\{k_t\int_{-\pi}^{+\pi}e^{(t-t')zi}\,dz\right\}$$

$$=\sum_{t=-nc}^{+nc}\left\{k_t\int_0^{\pi}\left[e^{(t-t')zi}+e^{-(t-t')zi}\right]dz\right\}$$

$$=2\sum_{t=-nc}^{+nc}\left\{k_t\int_0^{\pi}\cos[(t-t')z]\,dz\right\}$$

oder, wenn wir auch über t' in den Grenzen $-nc$ und $+nc$ summiren:

$$\sum_{t'=-nc}^{+nc}\int_{-\pi}^{+\pi}\prod_{\mu=1}^{\nu}\varphi_\mu(z)e^{-t'zi}\,dz=2\sum_{t'=-nc}^{+nc}\sum_{t=-nc}^{+nc}\left\{k_t\int_0^{\pi}\cos[(t-t')z]\,dz\right\}.$$

Das Integral rechts verschwindet nun für alle Werthe von $t'\neq t$, für jeden Werth $t'=t$ aber wird es:

---

*) Hier ist $s=\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu$ nach unserer früheren Bezeichnung; übrigens könnten wir bei dieser Entwicklung auch die erste Eintheilung der Fehleramplituden beibehalten. Nur die Analogie mit dem Früheren hat mich veranlasst, auf die Vortheile, die sich sogar daraus ergeben würden, zu verzichten.

$$\int_0^\pi dz = \pi.$$

Beide Summationen fallen also in eine über t zusammen, und links können wir dann auch, ohne sachlich etwas zu ändern, statt t' schreiben t, so dass sich ergiebt:

$$\sum_{t=-nc}^{+nc} \int_{-\pi}^{+\pi} \prod_{\mu=1}^{\nu} \varphi_\mu(z) e^{-tzi} dz = 2\pi \sum_{t=-nc}^{+nc} k_t$$

oder:

$$\sum_{t=-nc}^{+nc} k_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \prod_{\mu=1}^{\nu} [\varphi_\mu(z)] . \sum_{t=-nc}^{+nc} e^{-tzi} dz$$

Wir können jetzt die Reihen auf der rechten Seite, die mit $\sum_{t=-nc}^{+nc} e^{-tzi}$ und mit $\varphi_\mu(z)$ bezeichnet sind, leicht in folgender Weise umformen:

$$\sum_{t=-nc}^{+nc} e^{-tzi} = \sum_{t=-nc}^{+nc} e^{tzi}$$
$$= e^{-nczi} + e^{-(nc-1)zi} + \cdots + e^0 + \cdots + e^{+(nc-1)zi} + e^{+nczi}$$
$$= e^{-nczi} \left\{ 1 + e^{zi} + e^{2zi} + \cdots + e^{2nczi} \right\}$$
$$= e^{-nczi} . \frac{1 - e^{(2nc+1)zi}}{1 - e^{zi}}$$

Nun ist aber allgemein:

$$1 - e^{\omega i} = - e^{\frac{1}{2}\omega i} \left\{ e^{\frac{1}{2}\omega i} - e^{-\frac{1}{2}\omega i} \right\}$$
$$= \frac{2}{i} e^{\frac{1}{2}\omega i} \sin \frac{1}{2} \omega$$

Bei Anwendung dieser Formel auf Zähler und Nenner des Bruches in der letzten Gleichung wird:

$$\sum_{t=-nc}^{+nc} e^{-tzi} = e^{-nczi} . \frac{\sin\left\{(2nc+1)\frac{z}{2}\right\} \cdot e^{(2nc+1)\frac{z}{2} i}}{\sin\frac{z}{2} \cdot e^{\frac{z}{2} i}}$$

$$= \frac{\sin\left\{(2nc+1)\frac{z}{2}\right\}}{\sin\frac{z}{2}}$$

In ganz derselben Weise erhalten wir:

$$\varphi_\mu(z) = \sum_{t=-n\alpha_\mu}^{+n\alpha_\mu} e^{tzi} = \frac{\sin\left\{(2n\alpha_\mu + 1)\frac{z}{2}\right\}}{\sin\frac{z}{2}}$$

Demnach wird:

$$\sum_{t=-nc}^{+nc} k_t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left\{\frac{\sin\left\{(2n\alpha_\mu + 1)\frac{z}{2}\right\}}{\sin\frac{z}{2}}\right\} \cdot \frac{\sin\left\{(2nc+1)\frac{z}{2}\right\}}{\sin\frac{z}{2}}\, dz$$

Führen wir

$$nz = y$$

als neue Integrationsvariable ein, so wird also $dz = \frac{1}{n}dy$, und es ergeben sich $-\infty$ und $+\infty$ als neue Grenzen, da ja unserer Voraussetzung nach n sehr gross sein sollte. Dadurch wird:

$$\sum_{t=-nc}^{+nc} k_t = \frac{1}{2n\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left\{\frac{\sin\left(\alpha_\mu y + \frac{y}{2n}\right)}{\sin\frac{y}{2n}}\right\} \cdot \frac{\sin\left(cy + \frac{y}{2n}\right)}{\sin\frac{y}{2n}}\, dy.$$

Bei der angenommenen Grösse von n können wir annäherungsweise

$$\sin\frac{y}{2n} = \frac{y}{2n}$$

setzen. Dann wird:

$$\sum_{t=-nc}^{+nc} k_t = \frac{(2n)^\nu}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left\{\frac{\sin\left(\alpha_\mu y + \frac{y}{2n}\right)}{y}\right\} \cdot \frac{\sin\left(cy + \frac{y}{2n}\right)}{y}\, dy.$$

Erinnern wir uns nun, dass $\sum_{t=-nc}^{+nc} k_t$ die Zahl der Fälle angibt, in denen der Gesammtfehler in den Grenzen $-c\gamma$ und $+c\gamma$ liegt, so erhalten wir die Wahrscheinlichkeit $\overline{W}_c$, dass der Fehler die Grenze $|c\gamma|$ nicht überschreitet, wenn wir $\sum_{t=-nc}^{+nc} k_t$ durch die Anzahl aller möglichen Fehler $\sum_{t=-ns}^{+ns} k_t$ dividiren. Es ist aber, wie früher:

$$\sum_{t=-ns}^{+ns} k_t = \prod_{\mu=1}^{\nu}(2n\alpha_\mu + 1)$$

$$= (2n)^\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu + (2n)^{\nu-1} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{\prod_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu}{\alpha_\mu} + \cdots,$$

wenn wir wieder, wie in der ersten Entwicklung, bei der zweiten Näherung stehen bleiben.

Wir bekommen nunmehr:

$$\overline{W}_c = \frac{\sum\limits_{t=-nc}^{+nc} k_t}{\sum\limits_{t=-ns}^{+ns} k_t}$$

$$= \frac{(2n)^\nu}{\pi (2n)^\nu \prod\limits_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu \left\{1 + \frac{1}{2n} \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_\mu}\right\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left\{ \frac{\sin\left(\alpha_\mu y + \frac{y}{2n}\right)}{y} \right\} \cdot \frac{\sin\left(cy + \frac{y}{2n}\right)}{y} dy$$

$$= \frac{1}{\pi\left\{1 + \frac{1}{2n} \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_\mu}\right\}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left\{ \frac{\sin\left(\alpha_\mu y + \frac{y}{2n}\right)}{\alpha_\mu y} \right\} \cdot \frac{\sin\left(cy + \frac{y}{2n}\right)}{y} dy.$$

Wir erhalten einen völlig genügenden Näherungswerth für das Integral, wenn wir die unendlichen Grenzen auf endliche $-g$ und $+g$ reduziren, deren nähere Bestimmung wir später vornehmen werden. Es findet das seine Rechtfertigung und Begründung darin, dass der grösste Beitrag zum Integralwerthe von denjenigen y, welche um 0 herumliegen, geliefert wird, während die grösseren y fast gar Nichts zu demselben beitragen. Zu diesem Ergebniss gelangt man durch eine längere Erwägung über den Werth der Integralfunktion, die wir hier wohl übergehen können, da sie oft bei der Entwicklung des allgemeinen Wahrscheinlichkeitsintegrals gegeben wird. Es wird also jetzt:

$$\overline{W}_c = \frac{1}{\pi\left\{1 + \frac{1}{2n} \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_\mu}\right\}} \int\limits_{-g}^{+g} \prod_{\mu=1}^{\nu} \left\{ \frac{\sin\left(\alpha_\mu y + \frac{y}{2n}\right)}{\alpha_\mu y} \cdot \frac{\sin\left(cy + \frac{y}{2n}\right)}{y} \right\} dy.$$

Nun ist nach der bekannten Sinusreihe:

$$\sin\left(\alpha_\mu y + \frac{y}{2n}\right) = \alpha_\mu y + \frac{y}{2n} - \frac{1}{3!}\left(\alpha_\mu y + \frac{y}{2n}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\alpha_\mu y + \frac{y}{2n}\right)^5 - \cdots$$

$$= \alpha_\mu y - \frac{\alpha_\mu{}^3 y^3}{6} + \frac{\alpha_\mu{}^5 y^5}{120} + \frac{y}{2n} - \frac{\alpha_\mu{}^2 y^2}{2} \cdot \frac{y}{2n} + \frac{\alpha_\mu{}^4 y^4}{24} \cdot \frac{y}{2n} \cdots,$$

wenn wir die Glieder vernachlässigen, die y in einer höheren Potenz, als der 5. im Zähler oder $2n$ in einer höheren, als der 1.

im Nenner haben. Bremiker hat sich hier auf die 3 ersten Glieder beschränkt, wodurch sich ein ziemlich bedeutender Fehler ergeben würde, wenn derselbe nicht durch die gleichzeitige Vernachlässigung des zweiten Gliedes in der Anzahl aller Kombinationen ungefähr kompensirt würde.

Es wird jetzt:

$$\frac{\sin\left(\alpha_\mu y+\frac{y}{2n}\right)}{\alpha_\mu y}=1-\frac{1}{6}\alpha_\mu{}^2y^2+\frac{1}{120}\alpha_\mu{}^4y^4+\frac{1}{2n\alpha_\mu}-\frac{1}{4n}\alpha_\mu y^2+\frac{1}{48n}\alpha_\mu{}^3y^4.$$

Um einen bequemen Ausdruck für das Produkt Π der ν Faktoren von dieser Gestalt zu erhalten, nehmen wir den Logarithmus, indem wir die logarithmische Reihe:

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\cdots$$

anwenden. Es wird dann mit Innehaltung derselben Näherung, wie bisher:

$$\log\frac{\sin\left(\alpha_\mu y+\frac{y}{2n}\right)}{\alpha_\mu y}=-\frac{1}{6}\alpha_\mu{}^2y^2-\frac{1}{180}\alpha_\mu{}^4y^4+\frac{1}{2n\alpha_\mu}-\frac{1}{6n}\alpha_\mu y^2-\frac{1}{90n}\alpha_\mu{}^3y^4$$

und also:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu}\frac{\sin\left(\alpha_\mu y+\frac{y}{2n}\right)}{\alpha_\mu y}=e^{\log\prod\limits_{\mu=1}^{\nu}\frac{\sin\left(\alpha_\mu y+\frac{y}{2n}\right)}{\alpha_\mu y}}$$

$$=e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\left\{\log\frac{\sin\left(\alpha_\mu y+\frac{y}{2n}\right)}{\alpha_\mu y}\right\}}$$

$$=e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\left\{-\frac{1}{6}\alpha_\mu{}^2y^2-\frac{1}{180}\alpha_\mu{}^4y^4+\frac{1}{2n\alpha_\mu}-\frac{1}{6n}\alpha_\mu y^2-\frac{1}{90n}\alpha_\mu{}^3y^4\right\}}$$

$$=e^{-\frac{1}{6}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu{}^2y^2-\frac{1}{180}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu{}^4y^4+\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{2n\alpha_\mu}-\frac{1}{6n}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu y^2-\frac{1}{90n}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu{}^3y^4}$$

Wir setzen nun generell:

$$\sum_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu=\nu\sigma$$

$$\sum_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu{}^2=\nu\sigma'^2$$

$$\sum_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu{}^3=\nu\sigma''^3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Es ergiebt sich somit $\overline{W}_c$, wenn wir den Werth für das Produkt in das Integral einsetzen und dabei den konstanten Faktor $e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{2n\alpha_\mu}}$ vor das Integralzeichen nehmen:

$$\overline{W}_c = \frac{e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{2n\alpha_\mu}}}{\pi\left\{1 + \frac{1}{2n} \sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_\mu}\right\}} \int\limits_{-g}^{+g} e^{-\frac{1}{6}\nu\sigma'^2 y^2 - \frac{1}{6n}\nu\sigma y^2 - \frac{1}{180}\nu\sigma'''^4 y^4 - \frac{1}{90n}\nu\sigma''^3 y^4} \cdot \frac{\sin\left(cy + \frac{y}{2n}\right)}{y} dy$$

Die angewandten Reihenentwicklungen gelten aber nur für solche Werthe von y, für die sie konvergiren, jedenfalls also, wenn wir y als Funktion von ν in der folgenden Form annehmen:

$$y = \varkappa\nu^{-\lambda},$$

wo $\varkappa$ eine Konstante bedeutet. Nehmen wir z. B.:

$$\frac{1}{2} > \lambda > \frac{1}{4},$$

dann werden in dem Exponenten, der die Gestalt erhält:

$$-\frac{\varkappa^2}{6}\sigma'^2\nu^{1-2\lambda} - \frac{\varkappa^2}{6n}\sigma\nu^{1-2\lambda} - \frac{\varkappa^4}{180}\sigma'''^4\nu^{1-4\lambda} - \frac{\varkappa^4}{90n}\sigma''^3\nu^{1-4\lambda},$$

die beiden ersten Glieder mit zunehmendem ν grösser und grösser werden, während die beiden andern, sowie alle vernachlässigten, da sie nur negative Potenzen des ν enthalten, mit wachsendem ν immer kleiner werden. Beispielsweise können wir

$$\lambda = \frac{1}{3}$$

setzen und dementsprechend als Grenzen des Integrals:

$$-\varkappa\nu^{-\frac{1}{3}} \text{ und } +\varkappa\nu^{-\frac{1}{3}}$$

einführen. Eine erste Näherung $\overline{W}_c'$, die dem genauen Werthe des $\overline{W}_c$ desto näher kommt, je grösser ν ist, werden wir dann schon erhalten, wenn wir uns auf die beiden ersten Glieder im Exponenten beschränken. Wir wollen aber vorläufig bis zur zweiten Näherung gehen, als welche sich unter doppelter Anwendung der bekannten Formel:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

ergibt:

$$\overline{W}_c = \frac{e^{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{2n\alpha_\mu}}}{\pi\left\{1+\frac{1}{2n}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha_\mu}\right\}} \int\limits_{-\varkappa\nu^{-\frac{1}{3}}}^{+\varkappa\nu^{-\frac{1}{3}}} e^{-\frac{1}{6}\nu y^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)} \cdot e^{-\frac{1}{90}\nu y^4\left(\frac{1}{2}\sigma'''^4+\frac{1}{n}\sigma''^3\right)} \cdot \frac{\sin\left(cy+\frac{y}{2n}\right)}{y}\, dy$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2n}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha_\mu}\cdots}{\pi\left\{1+\frac{1}{2n}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha_\mu}\right\}} \int\limits_{-\varkappa\nu^{-\frac{1}{3}}}^{+\varkappa\nu^{-\frac{1}{3}}} e^{-\frac{1}{6}\nu y^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)} \left\{1-\frac{1}{90}\nu y^4\left(\frac{1}{2}\sigma'''^4+\frac{1}{n}\sigma''^3\ldots\right)\right\} \cdot \frac{\sin\left(cy+\frac{y}{2n}\right)}{y}\, dy.$$

Führen wir jetzt als neue Variable

$$u = y\sqrt{\frac{\nu}{6}}$$

ein, so erhalten wir mit Berücksichtigung dessen, dass die Grenzen dann:

$$-\frac{\varkappa}{\sqrt{6}}\nu^{+\frac{1}{6}} \text{ und } +\frac{\varkappa}{\sqrt{6}}\nu^{+\frac{1}{6}},$$

also bei einigermaassen grossem ν:

$$-\infty \text{ und } +\infty$$

werden, und mit Berücksichtigung davon, dass das Integral denselben Werth für ein positives, wie für das entsprechende negative u hat, demnach zu verdoppeln ist, wenn wir als Grenzen:

$$0 \text{ und } \infty$$

nehmen:

$$\overline{W}_c = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)} \frac{\sin\left(cu\sqrt{\frac{6}{\nu}}+\frac{u}{2n}\sqrt{\frac{6}{\nu}}\right)}{u}\, du -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)} \frac{2}{5\nu}u^3\left(\frac{1}{2}\sigma'''^4+\frac{1}{n}\sigma''^3\right)\sin\left(cu\sqrt{\frac{6}{\nu}}+\frac{u}{2n}\sqrt{\frac{6}{\nu}}\right) du =$$

$$= \overline{W}_c' - \overline{W}_c''.$$

Beide Integrale können wir mit Hülfe des bekannten Integrals (cf. Sturm, cours d'analyse Bd. II, pag. 22):

$$\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\cos 2\beta x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$$

auflösen. Integriren wir nämlich diese Integralgleichung nach β in den Grenzen 0 und l, so bekommen wir:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \frac{\sin 2lx}{x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \int_0^l e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}} d\beta.$$

Nach dieser Formel können wir $\overline{W}_c'$ umformen, wenn wir in derselben:

$$x = u,$$

$$\alpha = \sqrt{\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}},$$

$$l = \left(\frac{c}{2} + \frac{1}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu}}$$

setzen. Dann wird:

$$\overline{W}_c' = \frac{2}{\sqrt{\pi\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}} \int_0^{\left(\frac{c}{2}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu}}} e^{-\frac{u^2}{\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}}} du.$$

Führen wir schliesslich als neue Variable t in der Weise ein, dass wir:

$$\frac{u}{\sqrt{\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}}} = t$$

setzen, wodurch:

$$du = dt\sqrt{\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}}$$

und:

$$\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}}$$

obere Grenze wird, so erhalten wir das Endresultat:

$$\overline{W}_c' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\left(\frac{c}{2}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}}} e^{-t^2} dt.$$

Um das Integral $\overline{W}_c''$:

$$\overline{W}_c'' = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)} \frac{2}{5\nu} u^3 \left(\frac{1}{2}\sigma'''^4 + \frac{1}{n}\sigma''^3\right) \sin\left(cu\sqrt{\frac{6}{\nu}} + \frac{u}{2n}\sqrt{\frac{6}{\nu}}\right) du$$

$$= \frac{2}{5\nu\pi}\left(\sigma'''^4 + \frac{2}{n}\sigma''^3\right) \int_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)} u^3 \sin\left(cu\sqrt{\frac{6}{\nu}} + \frac{u}{2n}\sqrt{\frac{6}{\nu}}\right) du$$

zu berechnen, müssen wir unsere obige Formel (pag. 45):

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$$

dreimal nach β differenziren, wodurch sie folgende Gestalt annimmt:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} x^3 \sin 2\beta x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}} \left\{ \frac{3\beta}{2\alpha^4} - \frac{\beta^3}{\alpha^6} \right\}.$$

Setzen wir hierin:

$$x = u,$$

$$\alpha = \sqrt{\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}},$$

$$\beta = \left(\frac{c}{2} + \frac{1}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu}},$$

so wird bei Anwendung dieser Formel:

$$\overline{W}_c''' = \frac{\left(\sigma'''^4 + \frac{2}{n}\sigma''^3\right)}{5\nu\sqrt{\pi\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}} \left\{ \frac{\left(\frac{3c}{2} + \frac{3}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu}}}{2\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)^2} - \frac{\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{4n}\right)^3 \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)^3} \right\} e^{-\left(\frac{c}{2} + \frac{1}{4n}\right)^2 \frac{6}{\nu\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}}.$$

Es hat sich demgemäss als Ausdruck für die **Wahrscheinlichkeit** $\overline{W}_c$, **dass der Gesammtfehler zwischen** $-c\gamma$ **und** $+c\gamma$ **liegt**, ergeben:

$$\overline{W}_c = \overline{W}_c' \text{ in erster,}$$

$$\overline{W}_c = \overline{W}_c' - \overline{W}_c'' \text{ in zweiter Näherung.*)}$$

Der Werth des zur Berechnung von $\overline{W}_c'$ nothwendigen $\int e^{-t^2} dt$ ist unter anderm in der Form:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt$$

*) Lassen wir auch noch in $\overline{W}_c'$ die Glieder, die in n von der ersten Ordnung unendlich klein sind, fort, so erhalten wir den Bremikerschen Ausdruck:

$$\overline{W}_c' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int^{\frac{c}{2}\sqrt{\frac{6}{\nu\sigma'^2}}} e^{-t^2} dt.$$

für $t = 0.00$; 0.01; $0.02 \ldots$ bis $t = 2.00$ im Berliner Astronomischen Jahrbuch von 1834 von Encke tabulirt.

Die Formel für $\overline{W_c''}$ ist offenbar für die Berechnung sehr unbequem und wollen wir jetzt bei einer Anwendung unserer Formeln auf unser früheres Beispiel der Addition von je 20 Logarithmen (siehe Cap. 9) sehen, ob es von wesentlicher Bedeutung ist, in der Praxis das Glied zweiter Ordnung $\overline{W_c''}$ mitzunehmen. In erster Linie soll uns aber diese Rechnung einen Aufschluss darüber geben, wie weit die zuletzt entwickelten Formeln mit den früheren (siehe Cap. 8) übereinstimmen.

Cap. 11.

Die Vergleichung der verschiedenen Formeln lässt sich in folgender Weise ausführen. Wir hatten als Werth der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen

$$+(s-2m)\gamma \text{ und } -(s-2m)\gamma$$

liegt, erhalten (siehe Cap. 8, pag. 32):

$$1-2W_m,$$

wo für W_m der im Cap. 9, pag. 36 angegebene Werth einzusetzen ist. Diesem Werthe entspricht nun für ein beliebiges m derjenige Werth von $\overline{W_c}$, in dem

$$c = s - 2m$$

gesetzt wird. Wenn wir für dieselben Intervalle, wie früher $1-2\,W_m$, jetzt $\overline{W_c}$ berechnen wollen, also für 0—100.5, 100.5—200.5, 200.5—300.5, 300.5—400.5, 400.5—500.5, 500.5—1000, so müssen wir $c = 2.01$, 4.01, 6.01, 8.01, 10.01 und 20 setzen, wodurch wir nach Multiplikation mit 100 die Wahrscheinlichkeit in Prozenten ausgedrückt erhalten für die Intervalle 0—100.5, 0—200.5 u. s. w., durch Subtraction demnach die gewünschten Werthe. Es sind nun folgende Daten anzuwenden:

$$\gamma = 50,\ \nu = 20,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\nu = 1, \text{ also}$$

$$\sigma = \frac{1}{\nu}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu) = 1,\ \sigma'^2 = \frac{1}{\nu}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_\nu^2) = 1,\ \sigma''^3 = 1,\ \sigma'''^4 = 1.$$

Dann ergibt sich als Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler bei der Addition von je 20 fünfstelligen Logarithmen in %₀

liegt zwischen:	0 bis 100.5*)	100.5 bis 200.5	200.5 bis 300.5	300.5 bis 400.5	400.5 bis 500.5	500.5 bis 1000
nach der Formel zweiter Näherung $1-2\,W_m$	55.4%	32.1	10.5	1.8	0.2	0
nach der Formel $\overline{W}_c'$	56.1	31.6	10.2	1.9	0.2	0
nach der Formel $\overline{W}_c' - \overline{W}_c''$	55.6	—	—	—	—	—

Dem möge die entsprechende Tabelle, die Bremiker nach seinen Formeln gefunden hat, gegenüber gestellt werden. Freilich hat derselbe ja die Intervalle, wie schon früher erwähnt (siehe pag. 39), ein wenig anders und der Praxis nicht entsprechend: 0—100, 100—200 u. s. w. gewählt, indessen macht das nur einen sehr geringen Unterschied.

Er hat also als Wahrscheinlichkeit erhalten, dass der Fehler

liegt zwischen:	0 bis 100	100 bis 200	200 bis 300	300 bis 400	400 bis 500	500 bis 1000**
nach der Formel $1-2\,W_m$	55.9%	31.9	10.2	1.8	0.2	0
„ „ „ $\overline{W}_c'$	56.1	31.7	10.2	1.8	0.2	0
„ „ „ $\overline{W}_c' - \overline{W}_c''$	55.9	31.9	10.2	1.8	0.2	0

Wir ersehen aus einer Vergleichung beider Tabellen: 1) dass

*) Einheiten der 7. Dezimale.

**) Die Zahlen für die richtigen Intervalle sind folgende:

	0 bis 100.5	100.5 bis 200.5	200.5 bis 300.5	300.5 bis 400.5	400.5 bis 500.5	500.5 bis 1000
$1-2\,\overline{W}_m$	56.1	31.8	10.2	1.7	0.2	0
$\overline{W}_c'$	56.3	31.6	10.1	1.8	0.2	0
$\overline{W}_c' - \overline{W}_c''$	56.2	31.7	10.1	1.8	0.2	0

die Uebereinstimmung zwischen den 1—2 W_m und den $\overline{W}_c$ Formeln eine recht gute ist, und 2) dass jedenfalls bei grossem ν auch die Bremikersche Näherungsformel $\overline{W}_c'$, die sogar die Glieder, die in n von der ersten Ordnung unendlich klein sind, vernachlässigt:

$$\overline{W}_c' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{c}{2}\sqrt{\frac{6}{\nu \sigma'^2}}} e^{-t^2}\, dt,$$

genügende Näherungswerthe liefert:

Was den Mangel an Uebereinstimmung zwischen den theoretischen und den empirischen Werthen bei unserem Beispiel betrifft, der also auch bei dem Vergleich der $\overline{W}_c'$ Formeln mit den praktischen Ergebnissen bestehen bleibt, so sind ja bereits früher (Cap. 9 pag. 35) einige Bemerkungen darüber gemacht werden.

Hinsichtlich der doppelten Zählung des Maximalfehlers dürfte noch Folgendes zu bemerken sein. Wir haben bei den theoretischen Entwickelungen dem Maximalfehler, der in der Praxis nur das halbe Gewicht wie die übrigen Fehler hat, dasselbe Gewicht beigelegt, wie den andern. Es müssen dadurch die grösseren Fehleraggregate relativ sich stärker vermehren, als die kleineren, sodass die entsprechend von uns unternommene Division durch eine der Praxis gegenüber zu grosse Gesammtfehleranzahl:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu} (2n\alpha_\mu + 1)$$

die Wirkung zu kleiner Wahrscheinlichkeitswerthe für kleinere Fehleraggregate haben muss. Würden wir aber andererseits durch die wahre Gesammtzahl:

$$\prod_{\mu=1}^{\nu} 2n\alpha_\mu$$

dividirt haben, wodurch die $\overline{W}_c'$ Formeln noch einen Faktor:

$$\left(1 + \frac{1}{2n} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_\mu}\right)$$

erhielten, so müsste sich $\overline{W}_c$ z. B. für das Intervall 0 bis 100.5 zu gross ergeben. In der That wird dann:

$$\overline{W}_c = (\overline{W}_c' - \overline{W}_c'')\left(1 + \frac{1}{2n}\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha_\mu}\right) = 55.6\cdot\frac{6}{5} = 66.7\,\%_0,$$

während der beste empirische Werth (siehe Cap. 9, pag. 34) 64.9 % war.

Cap. 12.

Es wird sich nun darum handeln, allgemeine Ausdrücke für den Potenzmittelwerth 0. und den 1. Ordnung — wahrscheinlichen und mittleren Fehler — zu finden. Hierbei sei erwähnt, dass der Potenzmittelwerth 0. Ordnung oder Zentralwerth denjenigen Werth, für welchen die Summe der ersten Potenzen der Abweichungen der einzelnen Fehler von ihm — der Potenzmittelwerth 1. Ordnung dagegen den Werth bezeichnet, für welchen die Summe der Quadrate jener Abweichungen zu einem Minimum wird. Ersterer ist, wie leicht streng zu beweisen,*) derjenige Fehler, der von eben so vielen nicht erreicht, als überschritten wird, also der Zentralfehler, welcher durch einfache Schichtung und Abzählung in der Praxis gefunden werden kann. Als Potenzmittelwerth 1. Ordnung hingegen ergibt sich das arithmetische Mittel, natürlich ohne Rücksicht auf das Vorzeichen.

Erinnern wir uns, dass $1-2\,W_m$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass der Gesammtfehler zwischen 0 und $|(s-2m)\gamma|$ liegt (siehe Cap. 8, pag. 32), so ist offenbar dasjenige $(s-2m)\gamma$ der Zentralfehler ε_0, dem die Wahrscheinlichkeit:

$$1 - 2\,W_m = \frac{1}{2}$$

entspricht. Es muss demnach m aus der Gleichung:

$$W_m = \frac{1}{4},$$

die aber im allgemeinen auf gewöhnlichem Wege nicht gelöst werden kann, abgeleitet werden.

---

*) Siehe: G. Fechner, „Ueber den Ausgangswerth der kleinsten Abweichungssumme, dessen Bestimmung, Verwendung und Verallgemeinerung," 1874, XI. Band der Abhandlungen der physikalisch-mathematischen Klasse der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

Um ferner den Potenzmittelwerth 1. Ordnung ε_1, also das arithmetische Mittel der Fehler zu bestimmen, ist es nöthig, jeden einzelnen Fehler $p=(s-2m)\gamma$ mit seiner Wahrscheinlichkeit V_p (siehe Cap. 7 pag. 29) zu multipliziren und die Summe aller dieser Produkte zu bilden, d. h. wir müssen berechnen:

$$\varepsilon_1 = 2\int_{m=0}^{\frac{1}{2}s} p\, V_p\, dm.$$

Für V_p hatten wir aber (Cap. 7 pag. 29), wenn wir unseren nachherigen Erörterungen über die W Formeln entsprechend die Glieder zweiter Ordnung fortlassen, gefunden:

$$V_p = \frac{1}{2n(\nu-1)!\prod\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu} \sum_{\mu=0}^{\nu}{}' (m - s_\mu \alpha)^{\nu-1}.$$

Setzen wir diesen Werth in das Integral ein und führen wir die Integration entweder direkt oder auf ähnlichem Wege, wie die im Cap. 8 (siehe pag. 29 u. 30) aus, so kommen wir schliesslich zu dem Resultat erster Näherung:

$$\varepsilon_1 = \frac{\gamma}{n(\nu+1)!\prod\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu} \sum_{\mu=0}^{\nu}{}' \left(\frac{s}{2} - s_\mu \alpha\right)^{\nu+1}.$$

Es sind natürlich nur diejenigen Potenzen zu summiren, für welche die Basen positiv sind. Bei einigermassen grossem ν werden aber die einzelnen Glieder so gross und unter Umständen so wenig von einander verschieden, dass eine unverhältnissmässig grosse Zahl von Dezimalen bei der logarithmischen Berechnung dieses Ausdrucks erforderlich wäre.

Demnach erscheint es bei dem wahrscheinlichen Fehler nothwendig, bei dem mittleren berechtigt, eine Ableitung für dieselben aus unseren $\overline{W}_c$ Formeln zu versuchen.

Cap. 13.

Da wir $\overline{W}_c'$ als Grad der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen 0 und $|c\gamma|$ liegt, gefunden hatten (Cap. 10 pag. 46), so ergibt sich der Potenzmittelwerth 0. Ordnung:

$$\varepsilon_0 = h\gamma,$$

wenn h der Gleichung genügt:

$$\overline{W'_h} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\left(\frac{h}{2}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}}} e^{-t^2}\, dt.$$

Jetzt können wir die obere Grenze direkt finden, wenn wir in den Enckeschen Tafeln („Berliner Astronomisches Jahrbuch" 1834) nachsehen, welcher oberen Grenze als Werth des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-t^2} dt$ die Grösse $\frac{1}{2}$ entspricht. Wir finden dafür die Zahl:

$$0.476936 = \rho$$

nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise. Es ist nämlich dies die Zahl, die gleich dem, wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung gezeigt wird, konstanten Produkt aus dem Zentralfehler und dem sogenannten Präzisionsmodul ist. Es ist nun also die obere Grenze unseres Integrals:

$$\left(\frac{h}{2}+\frac{1}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}} = \rho$$

oder:

$$h = 2\left\{\rho\sqrt{\frac{\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}{6}} - \frac{1}{4n}\right\}$$

und:

$$\varepsilon_0 = 2\gamma\left\{\rho\sqrt{\frac{\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}{6}} - \frac{1}{4n}\right\}.$$

Entsprechend dem Prinzip rechnerischer Oekonomie, das ja eigentlich Veranlassung zu der ganzen Untersuchung gegeben hat, können wir auch noch die Glieder, die in n von der ersten Ordnung unendlich klein sind, in der praktisch wichtigsten Formel für den wahrscheinlichen Fehler fortlassen, wodurch wir auf den folgenden Ausdruck erster Näherung*) kommen:

$$\varepsilon_0 = 2\gamma\rho\sqrt{\frac{\nu\sigma'^2}{6}}.$$

*) Dieser Ausdruck stimmt, wie zu erwarten war, mit dem, welchen Bremiker erhalten hat, überein.

Andererseits wollen wir doch auch den strengeren Werth des ε_0, der sich bei Berücksichtigung des $\overline{W}_c''$ ergibt, herleiten. Für die meisten praktischen Fälle wird das von keiner direkten Bedeutung sein, wohl aber für die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers eines einzelnen interpolirten Logarithmus, wo ν nur gleich 3 ist. Diese Aufgabe werden wir aber aus theoretischen Gründen im Späteren vornehmen müssen.

Der strengere Werth von ε_0 ist offenbar:

$$\varepsilon_0 = H\gamma,$$

wenn H der Gleichung:

$$\overline{W}_H = \frac{1}{2}$$

genügt, während wir berechnet haben:

$$\varepsilon_0 = h\gamma,$$

wo h der Gleichung:

$$\overline{W}_h' = \frac{1}{2}$$

genügen sollte.

Nun wird sich ja H nicht viel von h unterscheiden, so dass wir setzen können:

$$H = h + dh,$$

und ebenso können wir $\overline{W}_h''$, das wir bei der Berechnung von h vernachlässigt haben, als differential gegenüber $\overline{W}_h'$ ansehen, also schreiben:

$$\overline{W}_h'' = \frac{\partial(\overline{W}_h')}{\partial h}\, dh.$$

Hieraus folgt:

$$dh = \frac{\overline{W}_h''}{\frac{\partial(W_h')}{\partial h}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sigma'''^4 + \frac{2}{n}\sigma''^3}{5\nu\sqrt{\pi\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}} \left[\dfrac{\left(\frac{3h}{2} + \frac{3}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu}}}{2\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)^2} - \dfrac{\left(\frac{h}{2} + \frac{1}{4n}\right)^3 \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)^3}\right] e^{-\left(\frac{h}{2} + \frac{1}{4n}\right)^2 \frac{6}{\nu\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}}}{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\dfrac{6}{\nu\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}}\, e^{-\frac{6}{\nu\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}\left(\frac{h}{2} + \frac{1}{4n}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\left(\sigma'''^4 + \frac{2}{n}\sigma''^3\right)\left\{\frac{\left(\frac{3h}{2} + \frac{3}{4n}\right)\sqrt{\frac{6}{\nu}}}{2\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)^2} - \frac{\left(\frac{h}{2} + \frac{1}{4n}\right)^3 \left(\frac{6}{\nu}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)^3}\right\}}{5\sqrt{6\nu}}.$$

Wir wollen jetzt hier für h unseren gefundenen Näherungswerth (siehe pag. 51):

$$h = 2\left\{\rho\sqrt{\frac{\nu\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}{6}} - \frac{1}{4n}\right\}$$

einsetzen. Dann wird:

$$dh = \frac{\sigma'''^4 + \frac{2}{n}\sigma''^3}{5\sqrt{6\nu}\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{3}{2}\rho - \rho^3\right).$$

Also wird:

$$\varepsilon_0 = H\gamma = (h + dh)\gamma,$$

oder:

$$\varepsilon_0 = 2\gamma\left\{\rho\sqrt{\frac{\nu\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}{6}} - \frac{1}{4n} + \frac{\sigma'''^4 + \frac{2}{n}\sigma''^3}{5\sqrt{6\nu}\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{3}{4}\rho - \frac{1}{2}\rho^3\right)\right\}.$$

Cap. 14.

Zur Bestimmung des Potenzmittelwerthes 1. Ordnung ist es, wie wir im vorvorigen Kapitel sahen, nöthig, die Summe über die Produkte eines jeden Fehlers mit seiner bezüglichen Wahrscheinlichkeit zu bilden. Nach unseren Bezeichnungen im Cap. 10 entspricht nun einem Fehler $t\frac{\gamma}{n}$ der Koeffizient k_t, demnach die Wahrscheinlichkeit:

$$\overline{V}_{\frac{t}{n}} = \overline{V}_c = \frac{k_t}{(2n)^\nu \prod\limits_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu \left\{1 + \frac{1}{2n}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha_\mu}\right\}}.$$

Im Cap. 10 hatten wir gefunden:

$$\sum_{t=-nc}^{+nc} k_t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \prod_{\mu=1}^{\nu} \varphi_\mu(z) \sum_{t=-nc}^{+nc} e^{tzi}\, dz,$$

woraus ohne weiteres folgt:

$$k_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \prod_{\mu=1}^{\nu} \varphi_\mu(z) e^{tzi} dz,$$

also:

$$\overline{V}_c = \frac{1}{2\pi(2n)^\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu \left\{1 + \frac{1}{2n} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_\mu}\right\}} \int_{-\pi}^{+\pi} \prod_{\mu=1}^{\nu} \varphi_\mu(z) e^{tzi} dz.$$

Diesen Ausdruck können wir ganz analog den Ausführungen im Cap. 10 umändern. Wir hatten dort erhalten:

$$\overline{W}_c = \frac{1}{2\pi(2n)^\nu \prod_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu \left\{1 + \frac{1}{2n} \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{1}{\alpha_\mu}\right\}} \int_{-\pi}^{+\pi} \prod_{\mu=1}^{\nu} \varphi_\mu(z) \sum_{t=-nc}^{+nc} e^{tzi} dz$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma^2 + \frac{\sigma}{n}\right)} \cdot \frac{\sin\left(cu\sqrt{\frac{6}{\nu}} + \frac{u}{2n}\sqrt{\frac{6}{\nu}}\right)}{u} \left\{1 - \frac{2}{5\nu} u^4 \left(\frac{1}{2}\sigma'''^4 + \frac{1}{n}\sigma''^3\right)\right\} du$$

(siehe pag. 44.)

Unser Ausdruck $\overline{V}_c$ unterscheidet sich aber von $\overline{W}_c$ nur in dem Faktor e^{tzi} statt der $\sum_{t=-nc}^{+nc} e^{tzi}$ in $\overline{W}_c$. Dieser Faktor lieferte nun bei der Umformung das Glied:

$$\sum_{t=-nc}^{+nc} e^{tzi} = \frac{\sin\left(cu\sqrt{\frac{6}{\nu}} + \frac{u}{2n}\sqrt{\frac{6}{\nu}}\right)}{\frac{u}{2n}\sqrt{\frac{6}{\nu}}},$$

wofür jetzt eintreten muss:

$$e^{tzi} = e^{\frac{t}{n}yi} = e^{cyi} = e^{cu\sqrt{\frac{6}{\nu}}\, i},$$

sodass sich ergibt:

$$\overline{V}_c = \frac{\sqrt{\frac{6}{\nu}}}{n\pi} \int_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma^2 + \frac{\sigma}{n}\right)} \left\{1 - \frac{2}{5\nu} u^4 \left(\frac{1}{2}\sigma'''^4 + \frac{1}{n}\sigma''^3\right)\right\} e^{cu\sqrt{\frac{6}{\nu}}\, i} du.$$

Da aber die Wahrscheinlichkeit für einen negativen Fehler dieselbe ist, wie für den gleich grossen positiven, so folgt:

$$2\overline{V}_c = \frac{\sqrt{\frac{6}{\nu}}}{n\pi}\int_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}\left\{1-\frac{2}{5\nu}u^4\left(\frac{1}{2}\sigma'''^4+\frac{1}{n}\sigma''^3\right)\right\}\left\{e^{cu\sqrt{\frac{6}{\nu}}\,i}+e^{-cu\sqrt{\frac{6}{\nu}}\,i}\right\}du$$

oder:

$$\overline{V}_c = \frac{\sqrt{\frac{6}{\nu}}}{n\pi}\int_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}\left\{1-\frac{2}{5\nu}u^4\left(\frac{1}{2}\sigma'''^4+\frac{1}{n}\sigma''^3\right)\right\}\cos\left(cu\sqrt{\frac{6}{\nu}}\right)du$$

$$\overline{V}_c = \frac{\sqrt{\frac{6}{\nu}}}{n\pi}\int_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}\cos\left(cu\sqrt{\frac{6}{\nu}}\right)du -$$

$$-\frac{2\sqrt{\frac{6}{\nu}}}{5\nu n\pi}\left(\frac{1}{2}\sigma'''^4+\frac{1}{n}\sigma''^3\right)\int_0^\infty e^{-u^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}u^4\cos\left(cu\sqrt{\frac{6}{\nu}}\right)du.$$

Das erste Integral können wir nach der schon früher (Cap. 10 pag. 45) gebrauchten Formel:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\cos(2\beta x)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}$$

auflösen, indem wir setzen:

$$x = u,\quad \alpha = \sqrt{\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}},\quad \beta = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{6}{\nu}}.$$

Zur Berechnung des zweiten Integrals ist es erforderlich, dass wir das Hülfsintegral viermal nach β differenziren, wodurch dasselbe in:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2x^2}\cos(2\beta x)\,x^4\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}\left\{\frac{3}{4\alpha^4}-\frac{3\beta^2}{\alpha^6}+\frac{\beta^4}{\alpha^8}\right\}$$

übergeht und sich bei Einführung derselben Substitutionen, wie vorher, auf das zweite Integral anwenden lässt.

Wir erhalten so:

$$\overline{V}_c = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{6}{\nu\pi\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}}\,e^{-\frac{3}{2\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}c^2}\Bigg[1+$$

$$+\frac{2}{5\nu}\left(\frac{1}{2}\sigma'''^4+\frac{1}{n}\sigma''^3\right)\left\{\frac{3}{4\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)^2}-\frac{9c^2}{2\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)^3}+\frac{9c^4}{4\nu^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)^4}\right\}\Bigg]$$

als Wahrscheinlichkeitsausdruck dafür, dass der Fehler gleich $+ c\gamma$ oder gleich $- c\gamma$ ist, woraus als Wahrscheinlichkeit für einen Fehler $|c\gamma|$ folgt:

$$2\overline{V}_c.$$

Nach unseren früheren Erörterungen ist demnach:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sum_{c=0}^{\nu\sigma} 2c\gamma \overline{V}_c \\ &= \sum_{c=0}^{\nu\sigma} 2c\gamma \overline{V}_c n \frac{1}{n} \\ &= \int_0^{\nu\sigma} 2cn\gamma \overline{V}_c dc, \text{ in erster Näherung,} \end{aligned}$$

wenn wir $\frac{1}{n}$ als Increment dc annehmen.

Setzen wir hier den Werth von $\overline{V}_c$ ein, so erhalten wir Integrale von einer Form, die eine partielle Integration und damit die Zurückführung auf ein bekanntes Integral ermöglicht, nämlich von der Form:

$$\begin{aligned} \int e^{-bx^2} x^{2n+1} dx &= \int e^{-bx^2} x\, dx x^{2n} \\ &= -\int d\left(\frac{e^{-bx^2}}{2b}\right) x^{2n} \\ &= \frac{n}{b}\int e^{-bx^2} x^{2n-1} dx - \frac{1}{2b} e^{-bx^2} x^{2n}. \end{aligned}$$

Wenden wir diese Formel genügend oft an, so kommen wir schliesslich zum:

$$\int e^{-bx^2} x\, dx = -\frac{1}{2b} e^{-bx^2},$$

welches für unsere Grenzen 0 und $\nu\sigma$ wird:

$$\int_0^{\nu\sigma} e^{-bx^2} x\, dx = \frac{1}{2b}(1 - e^{-b(\nu\sigma)^2}).$$

Mit Hülfe dieser Formel können wir ε_1 berechnen, wenn wir:

$$x = c \text{ und } b = \frac{3}{2\nu\left(\sigma'^2 + \frac{\sigma}{n}\right)}$$

setzen. Wir erhalten dann eine Reihe von Gliedern, von denen wir diejenigen fortlassen können, die den Faktor

$$e^{-\frac{3(\nu\sigma)^2}{2\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}} = e^{-\frac{3(\nu\sigma)^2}{2\nu\sigma'^2\ldots}}$$

enthalten, da $(\nu\sigma)^2$ offenbar jederzeit viel grösser als $\nu\sigma'^2$ ist; es wird nun:

$$\varepsilon_1 = \gamma\sqrt{\frac{2\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}{3\pi}}\Bigg\{1 + \frac{2}{5\nu}\left(\frac{1}{2}\sigma'''^4+\frac{1}{n}\sigma''^3\right)\left[\frac{3}{4\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)^2} - \frac{9}{2\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)^3} + \frac{9}{4\nu^2\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)^4}\right]\Bigg\}.$$

Offenbar können wir bei einigermassen grossem ν auch noch die Glieder, welche im Nenner die zweite oder eine höhere Potenz von ν enthalten, fortlassen, wonach sich ergibt:

$$\varepsilon_1 = \gamma\sqrt{\frac{2\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}{3\pi}}\left\{1 + \frac{3}{10\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)^2}\left(\frac{1}{2}\sigma'''^4+\frac{1}{n}\sigma''^3\right)\right\}.$$

Entsprechend unsern Ausführungen beim wahrscheinlichen Fehler, wird es sich empfehlen, in der Praxis auch noch die Glieder, die ν oder n in der -1. Potenz enthalten, zu vernachlässigen, also als mittleren Fehler erster Näherung:

$$\varepsilon_1 = \gamma\sqrt{\frac{2\nu\sigma'^2}{3\pi}}$$

anzunehmen.*)

Statt dieser selbstständigen Herleitung des Potenzmittelwerthes 1. Ordnung hätten wir uns auch auf den Zentralwerth beziehen können und aus den früheren drei Werthen desselben mittelst der bekannten Formel:

*) Dieser Ausdruck stimmt natürlich wieder mit dem Bremikerschen überein, während sein ε_1 zweiter Näherung lautet: $\varepsilon_1 = 2\gamma\sqrt{\frac{\nu\sigma'^2}{6\pi}}\left\{1+\frac{\sigma'''^4}{20\nu\sigma'^4}\right\}$. Hier ist übrigens ein Fehler vorhanden; nach seinen Entwicklungen müsste es heissen: $\varepsilon_1 = 2\gamma\sqrt{\frac{\nu\sigma'^2}{6\pi}}\left\{1+\frac{3\sigma'''^4}{20\nu\sigma'^4}\right\}$.

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_0}{\rho \sqrt{\pi}},$$

wo ρ dieselbe Bedeutung, wie früher, hat, drei entsprechende Näherungswerthe für ε_1 ableiten können. Als erste Näherung hätten wir dann genau denselben Werth, wie jetzt erhalten.

Cap. 15.

Wir wollen nun die Formeln für die Potenzmittelwerthe, wie sie einerseits aus den W und andererseits aus den $\overline{W}$ Formeln folgen, unter einander und mit den empirischen Resultaten unseres früheren Beispiels der Addition von je 20 Logarithmen vergleichen.

Es war in erster Näherung:

$$\varepsilon_0 = 2\gamma\rho \sqrt{\frac{\nu\sigma'^2}{6}}.$$

Tragen wir die Daten des Beispiels der Addition von 20 Logarithmen, die direkt den Tafeln entnommen wurden, ein, so wird:

$$\underline{\varepsilon_0 = 87.1,}$$

während die zweite Näherung den Werth:

$$\underline{\varepsilon_0 = 87.4,}$$

also keine ins Gewicht fallende Aenderung ergibt.

Ob dieses ε_0 mit dem übereinstimmt, welches sich aus der Formel (Cap. 12, pag. 49):

$$W_m = \frac{1}{4}$$

als: $\varepsilon_0 = (s - 2m)\gamma$ ergeben würde, ersehen wir in der Weise, dass wir W_m mit Hülfe desjenigen m berechnen, welches aus:

$$(s - 2m)\gamma = 87.1$$

folgt. Für dies $m = 9.129$ müsste $W_m = \frac{1}{4}$ werden, und in der That ist das Resultat:

$$\underline{W_m = 0.251.}$$

Für ε_1 folgt nach der Formel im Cap. 12 (pag. 50), welche aus der W_m Formel abgeleitet ist:

$$\underline{\varepsilon_1 = 103.3.}$$

dagegen nach der Formel erster Näherung im Cap. 14 (pag. 57):

$$\varepsilon_1 = 103.0.$$

Wir finden also, dass die verschiedenen Formeln recht gut mit einander übereinstimmen und dass die Formeln erster Näherung nur unwesentliche Abweichungen von denen höherer Näherung zeigen. Im Folgenden sei noch eine Vergleichstabelle der aus der Theorie gefolgerten Potenzmittelwerthe erster Näherung und der empirisch aus unsern früheren Beobachtungsreihen (Cap. 9, pag. 33), sich ergebenden Werthe gegeben:

	ε_0	ε_1
1) Aus den Formeln erster Näherung folgt	87.1	103.0
2) Aus dem Beispiel von 20 Summen von je 20 Logarithmen:	80.5	98.8
3) - - - - 150 - - - - -	83.0	98.0
4) - - - - 270 - - - - -	78.8	86.7
5) - 2) +3) +4), also 440*) - - - - -	80.3	91.1
6) - 3) +4), also 420*) - - - - -	80.3	90.7

Es zeigt sich demnach auch hier wieder, dass in der Praxis die Ausgleichung der Fehler in noch stärkerem Maasse stattfindet, als es die theoretischen Ergebnisse erwarten lassen.

Cap. 16.

Zusammenstellung der Hauptformeln.

In der folgenden Zusammenstellung wollen wir $\nu\sigma'^2$ wieder ersetzen durch die deutlichere Bezeichnung $\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}(\alpha_\mu)^2$ und γ in Einheiten der letzten Dezimale der angewandten Logarithmen ausdrücken, also schreiben $\gamma = \frac{1}{2}$, dann ist in erster Näherung:

I. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Gesammtfehler einer logarithmischen Rechnung zwischen 0 und $\left|\frac{1}{2}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu - m\right|$ liegt:

$$1 - 2W_m = 1 - \frac{2}{\nu! \prod\limits_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu} \sum_{\mu=1}^{\nu}{}' (m - s_\mu \alpha)^\nu.$$

*) Natürlich mit Berücksichtigung der Anzahl der Beobachtungen.

II. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Resultatfehler zwischen 0 und $\left|\frac{c}{2}\right|$ liegt:

$$W_c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{c}{2}\sqrt{\frac{6}{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}(\alpha_\mu)^2}}} e^{-t^2}\, dt.$$

III. Der wahrscheinliche Fehler:

$$\varepsilon_0 = \rho \sqrt{\frac{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}(\alpha_\mu)^2}{6}}.$$

IV. Der mittlere Fehler:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}(\alpha_\mu)^2}{6\pi}}.$$

Cap. 17.

Hiermit hätten wir unsere Aufgabe vollständig gelöst, wenn wir es nur mit Logrithmen, die direkt in den Tafeln stehen, zu thun hätten. Meistens müssen wir aber mit interpolirten Logarithmen rechnen, wodurch die α in unseren Formeln in eine Abhängigkeit von den jeweiligen Interpolationsfaktoren ε gerathen. Wir erinnern uns, dass wir den Gesammtfehler F eines interpolirten Logarithmus im Cap. 2 (pag. 8) gefunden hatten:

$$F = (1-\varepsilon)f_1 + \varepsilon f_2 + f_3,$$

wo die f_1, f_2, f_3 im Maximum den Werth 50 Hundertel der letzten angegebenen Stelle annehmen können. Dieser Werth F ist also allgemein für f' in der Formelserie A' im Cap. 5 (pag. 19) einzusetzen, während in der Serie B' (pag. 19) für f', wie schon in einer Anmerkung auf pag. 21 angedeutet ist, nur zu schreiben ist:

$$\Phi = (1-\varepsilon)f_1 + \varepsilon f_2.$$

Wir wollen das noch etwas genauer begründen. Die Serie B' gibt die Formeln für den Uebergang vom Logarithmus zum Numerus in der Form:

$$f[\varphi(x)] = A(\varphi)\left\{f\bigl(\log[\varphi(x)]\bigr) - f'\right\}.$$

$A(\varphi)$ war ein numerischer Faktor, der von φ abhing, $f\bigl(\log[\varphi(x)]\bigr)$ der durch die vorhergegangene Rechnung veranlasste Fehler, wozu auch der eventuelle Abkürzungsfehler dieses Logarithmus auf die betreffende Stellenzahl zu rechnen ist. f' dagegen ist der bei der Interpolation in Betracht kommende Fehler der Tafellogarithmen, dessen Einfluss auf den Numerus eben die erwähnten Formeln angeben. Nun sei $\log[\varphi(x)] = L$, der nächst kleinere Tafellogarithmus L_1 mit dem Fehler f_1, der nächst grössere L_2 mit dem Fehler f_2, wo $f_1 \leqq 50$, $f_2 \leqq 50$. Um jetzt $\varphi(x)$ zu finden suche ich erst den Numerus $\varphi(L_1)$ zum Argument L_1 und dann die Korrektion des Numerus für dasjenige Produkt $\varepsilon(L_2 - L_1)$, das gleich $L - L_1$ ist, wo ε den sogenannten Proportionalitätsfaktor bedeutet und durch die Ungleichung:

$$0 < \varepsilon < 1$$

bestimmt ist. Die Fehler dieser beiden Argumente sind aber offenbar folgende:

der von L_1 .... f_1

" " $\varepsilon(L_2 - L_1)$ .... $\varepsilon(f_2 - f_1)$.

Sonach wird

$$\underline{f' = \Phi = f_1 + \varepsilon(f_2 - f_1) = (1 - \varepsilon) f_1 + \varepsilon f_2.}$$

Wenn wir jetzt die beiden Formelserien den Erörterungen am Ende des Cap. 4 entsprechend nur zur Bestimmung der Fehlerwirkungen der logarithmischen Abkürzung benutzen wollen, so können wir in ihnen das negative Zeichen überall, wo das betreffende f von der vorigen Rechnung unabhängig ist, in das positive verwandeln, wonach wir bei Einsetzung des F und Φ erhalten:

𝔄.

$$1)\ f(\log x) = \frac{m}{x} f(x) + F,$$

$$2)\ f(\log\sin\varphi) = \frac{m}{r''}\operatorname{ctg}\varphi f''(\varphi) + F \qquad 3)\ f(\log\cos\varphi) = -\frac{m}{r''}\operatorname{tg}\varphi f''(\varphi) + F$$

$$4)\ f(\log\operatorname{tg}\varphi) = \frac{2m}{r''\sin 2\varphi} f''(\varphi) + F \qquad 5)\ f(\log\operatorname{ctg}\varphi) = -\frac{2m}{r''\sin 2\varphi} f''(\varphi) + F$$

und

𝔅.

$$1)\ f(x) = \frac{x}{m}\left\{f(\log x) + \Phi\right\}$$

$$2)\ f''(\varphi) = \frac{r''}{m}\operatorname{tg}\varphi\left\{f(\log\sin\varphi) + \Phi\right\} \quad 3)\ f''(\varphi) = -\frac{r''}{m}\operatorname{ctg}\varphi\left\{f(\log\cos\varphi) + \Phi\right\}$$

$$4)\ f''(\varphi) = \frac{r''}{2m}\sin 2\varphi\left\{f(\log\operatorname{tg}\varphi) + \Phi\right\} \quad 5)\ f''(\varphi) = -\frac{r''}{2m}\sin 2\varphi\left\{f(\log\operatorname{ctg}\varphi) + \Phi\right\}$$

Darin ist, wie wir gesehen haben, allgemein:

$$F = (1-\varepsilon)f_\alpha + \varepsilon f_\beta + f_\gamma\,,$$

und

$$\Phi = (1-\varepsilon)f_\alpha + \varepsilon f_\beta.$$

Beide reduziren sich im Falle eines direkten Tafellogarithmus auf f_α. Die obere Grenze für F ist im allgemeinen gleich 100 in Einheiten der auf die letzte angegebene Stelle als zweitnächste folgenden Dezimale, aber nicht immer, da unter Umständen der Maximalwerth von f_3 unter 50 bleibt. Das f_3 ist ja nämlich streng genommen der Abkürzungsfehler der mit ε multiplizirten Tafeldifferenz $L_2 - L_1 = \Delta$. Tritt nun also der Fall ein — und das kann thatsächlich vorkommen —, dass $\varepsilon\Delta < 50$ ist, d. h. mindestens $\Delta < 5$ Einheiten der letzten Dezimale, so kann natürlich der Abkürzungsfehler von $\varepsilon\Delta$ nicht mehr die Zahl 50 erreichen. Unsere Fehlergrenze 50 hört dann auf, Gültigkeit für f_3 zu behalten. Φ dagegen hat immer 50 als Maximalgrenze.

Cap. 18.

Im Anschluss an die beiden Serien 𝔄. und 𝔅. wollen wir noch eine ℭ. aus ihnen ableiten für die Berechnung der Logarithmen einer trigonometrischen Funktion aus einem gegebenen Logarithmus einer andern trigonometrischen Funktion mittelst Durchgangs durch den Winkel. Wir bekommen durch Kombinirung von 𝔄. und 𝔅.:

ℭ.

$$\begin{aligned}
1)\ f(\log\sin\varphi) &= \cos^2\varphi\, f(\log\operatorname{tg}\varphi) + \cos^2\varphi\,\Phi + F,\\
2)\ f(\log\cos\varphi) &= -\sin^2\varphi\, f(\log\operatorname{tg}\varphi) + \sin^2\varphi\,\Phi + F,\\
3)\ f(\log\sin\varphi) &= -\cos^2\varphi\, f(\log\operatorname{ctg}\varphi) + \cos^2\varphi\,\Phi + F,\\
4)\ f(\log\cos\varphi) &= \sin^2\varphi\, f(\log\operatorname{ctg}\varphi) + \sin^2\varphi\,\Phi + F,\\
5)\ f(\log\sin\varphi) &= -\operatorname{ctg}^2\varphi\, f(\log\cos\varphi) + \operatorname{ctg}^2\varphi\,\Phi + F,\\
6)\ f(\log\cos\varphi) &= -\operatorname{tg}^2\varphi\, f(\log\sin\varphi) + \operatorname{tg}^2\varphi\,\Phi + F.
\end{aligned}$$

Eine Uebersetzung dieser Formeln in Worte kann wohl unterbleiben, da sie der früher gegebenen der Serien 𝔄. und 𝔅, resp. A. und B. (Cap. 4, pag. 17) ganz analog ist.

Im Falle, dass man den Winkel selbst später nicht braucht, wird es aber bequemer sein, den Winkel selbst gar nicht erst auszurechnen, sondern direkt von einer Funktion zur andern überzugehen, z. B. in folgender Weise:

Es sei gegeben $\log \operatorname{tg} \varphi$, gesucht $\log \sin \varphi$ oder $\log \cos \varphi$. Eingeschlossen sei $\log \operatorname{tg} \varphi$ von den beiden Logarithmen $\log \operatorname{tg} \varphi_1$ und $\log \operatorname{tg} \varphi_2$, sodass, wenn wir:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \varphi_1 - \log \operatorname{tg} \varphi_2 &= \Delta_t, \\ \log \sin \varphi_1 - \log \sin \varphi_2 &= \Delta_s, \\ \log \cos \varphi_1 - \log \cos \varphi_2 &= \Delta_c, \\ \text{und } \log \operatorname{tg} \varphi - \log \operatorname{tg} \varphi_1 &= y \end{aligned}$$

setzen, sich ergibt:

$$\log \sin \varphi = \log \sin \varphi_1 + y \frac{\Delta_s}{\Delta_t}$$

$$\text{und } \log \cos \varphi = \log \cos \varphi_1 + y \frac{\Delta_c}{\Delta_t}.$$

Es wird sich auf diese Art bei kleinen Winkeln sehr gut der log cos, bei Winkeln von nahezu 90° sehr gut der log sin aus dem log tg finden lassen. Beispielshalber wird für $\varphi_1 = 6^\circ 0'$:

$$\begin{aligned} \log \sin \varphi &= \log \sin \varphi_1 + y \cdot \tfrac{2002}{2025}, \\ \text{aber } \log \cos \varphi &= \log \cos \varphi_1 + y \cdot \tfrac{22}{2025}. \end{aligned}$$

Während demnach nahezu der ganze Fehler, mit dem y behaftet ist, d. h. $f(\log \operatorname{tg} \varphi) + f_1$ auf den log sin übergeht, tritt derselbe in log cos nur mit dem Faktor $\frac{1}{92}$ multiplizirt auf.

Natürlich kommen wir immer zu denselben Funktionswerthen, sei es, dass wir durch den Winkel hindurchgehen, oder direkt die Tafeldifferenzen benutzen. Wir können auch leicht den Fehlerausdruck $f(\log \sin \varphi)$ für die letztere Methode der directen Anwendung der logarithmischen Differenzen bestimmen.

Der wahre $\log \sin \varphi$ — bezeichnen wir ihn mit $\overline{\log \sin \varphi}$ — wäre:

$$\overline{\log \sin \varphi} = \log \sin \varphi_1 + f_1 + \big(y + f(\log \operatorname{tg} \varphi) + f_3\big) \frac{\Delta_s + f_3 + f_4}{\Delta_t + f_1 + f_2}.$$

Der Fehler des erhaltenen $\log\sin\varphi$ wird also gleich der Differenz beider vermehrt um den Abrundungsfehler f_5 des $\log\sin\varphi$ sein. Die $f_1, f_2 \ldots$ bis f_5 haben die Fehlergrenze 50 in Einheiten der zweitfolgenden Dezimale. In erster und offenbar genügender Näherung können wir: $\frac{\Delta_s + f_3 + f_4}{\Delta_t + f_1 + f_2} = \frac{\Delta_s}{\Delta_t}$ setzen und erhalten:

$$f(\log\sin\varphi) = f_1 + \left\{f(\log \operatorname{tg}\varphi) + f_3\right\}\frac{\Delta_s}{\Delta_t} + f_5.$$

Den Maximalwerth bekommen wir, wenn wir $f_1 = f_3 = f_5 = 50$ und $\Delta_s = \Delta_t$ setzen. Es ist nämlich für alle Werthe von φ: $\Delta_s \leqq \Delta_t$. Demnach wird: $f(\log\sin\varphi) \leqq f(\log\operatorname{tg}\varphi) + 150$. Ganz ebenso erhalten wir aus Formel $\mathfrak{C}$, 1, wenn wir ensprechend $\varphi = 0$ setzen: $f(\log\sin\varphi) \leqq f(\log\operatorname{tg}\varphi) + 150$ Einheiten z. B. der siebenten Dezimale bei 5 stelliger Rechnung.

Bei der Wahl von Hülfswinkeln wird es von Nutzen sein, darauf zu achten, gerade die Funktion einzuführen, die die grössere Genauigkeit zulässt.

Cap. 19.

Wenden wir uns nun zu der Frage, in welchem Abhängigkeitsverhältnis die Resultate unserer Wahrscheinlichkeitsformeln von der Verschiedenheit der Interpolationsfaktoren ε stehen.

Es ist zunächst ohne weiteres klar, dass nur die fünf ersten ε: $\varepsilon = 0.1$; -0.2; -0.3; -0.4; -0.5 verschiedene Werthe liefern können, indem die übrigen vier: $\varepsilon = 0.6$ bis $\varepsilon = 0.9$ in umgekehrter Reihe den vier ersten entsprechen. Statt z. B. mit 0.9 zu interpoliren in Bezug auf den vorhergehenden Logarithmus, könnten wir mit 0.1 in Bezug auf den folgenden interpoliren. Es kommt ja immer nur die Kombination $(1 - \varepsilon)f_1 + \varepsilon f_2$ vor.

Wie weit nun aber die Formeln und die empirischen Ergebnisse von den Werthen $\varepsilon = 0.1$ bis 0.5 abhängig sind, wollen wir an dem Beispiel der Fehlerbestimmung eines einzelnen interpolirten Logarithmus untersuchen.

Der Gesammtfehler eines interpolirten Logarithmus ist, wie wir sahen:

$$(1-\varepsilon)f_1+\varepsilon f_2+f_3,$$

der Maximalfehler also 100, indem wir von dem Fall $\varepsilon\Delta < 50$ absehen. Wir werden nun für die 3 Werthe: $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.3$ und $\varepsilon = 0.5$ berechnen, mit welchem Grad von Wahrscheinlichkeit der Gesammtfehler zwischen 0 und 10.5, — 0 und 20.5 u. s. w. liegt, welches sein wahrscheinlicher, welches sein mittlerer Werth ist. Den theoretischen Werthen werden wir empirische gegenüberstellen, wobei Logarithmen, für die $\varepsilon\Delta < 50$ ist, ausgeschlossen sind. Bei der Kleinheit des ν wollen wir zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler eines interpolirten Logarithmus eine bestimmte Grenze nicht überschreitet, unsere W_m Formel aus Cap. 8 mit Berücksichtigung des zweiten Gliedes unter dem Σ' Zeichen benutzen, also (siehe pag. 30):

$$W_m=\frac{\sum\limits_{\mu=0}^{\nu}{}'\left\{\left(m+\frac{1}{2n}-s_\mu\alpha\right)^{\nu}+\frac{\nu(\nu-2\mu-1)}{4n}\left(m+\frac{1}{2n}-s_\mu\alpha\right)^{\nu-1}\right\}}{\nu!\prod\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu\left\{1+\frac{1}{2n}\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{\alpha_\mu}\right\}}.$$

Dann gibt:

$$100-200\,W_m$$

die Wahrscheinlichkeit in Prozenten an, dass der Fehler zwischen 0 und $|(s-2m)\gamma|$ liegt.

Ferner werden wir zur Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers unsere genaueste Formel aus Cap. 13 anwenden (pag. 53):

$$\varepsilon_0=2\gamma\left\{\rho\sqrt{\frac{\nu\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)}{6}}-\frac{1}{4n}+\frac{\sigma'''^4+\frac{2}{n}\sigma''^3}{5\sqrt{6\nu}\left(\sigma'^2+\frac{\sigma}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{3}{4}\rho-\frac{1}{2}\rho^3\right)\right\},$$

und schliesslich werden wir den mittleren Fehler aus dem gefundenen wahrscheinlichen Fehler mit Hülfe der Formel (pag. 57):

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon_0}{\rho\sqrt{\pi}}$$

berechnen.

Die Daten sind nun folgende:

$\nu = 3$, $n = 50$, $\gamma = 50$, $\alpha_1 = 1-\varepsilon$, $\alpha_2 = \varepsilon$, $\alpha_3 = 1$, $s = \nu\sigma = 2$, $\nu\sigma'^2 = 2(1-\varepsilon+\varepsilon^2)$, u. s. w., $\rho = 0.477$, $\pi = 3.1416$.

Demnach ist: $(s-2m)\gamma = 100 - 100\,m$, wo m jeden Werth zwischen 0 und 1 annehmen kann. Wir wollen dem m die Werthe 0.795, — 0.595, — 0.395, — 0.195 beilegen, bekommen dann entsprechend die Wahrscheinlichkeit $1-2W_m$ in Prozenten, dass der Fehler eines interpolirten Logarithmus für ein noch zu bestimmendes ε zwischen 0 und 20.5. — 0 und 40.5, — 0 und 60.5, — 0 und 80.5 liegt. Tragen wir übrigens unsere Daten bis auf m und ε in W_m ein, so nimmt dasselbe, da alle Potenzen mit negativen Basen fortfallen, die Gestalt an:

$$W_m = \frac{1}{6\varepsilon(1-\varepsilon)\left\{1+\frac{1}{100}\,\frac{1+\varepsilon-\varepsilon^2}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\right\}}\Big[(m+\tfrac{1}{100})^3-(m+\tfrac{1}{100}-\varepsilon)^3- \\ -(m-\tfrac{99}{100}+\varepsilon)^3+\tfrac{3}{100}(m+\tfrac{1}{100})^2\Big].$$

Wir werden in den folgenden Tabellen die vier erwähnten Werthe von $1-2W_m$, sowie die Potenzmittelwerthe 0. und 1. Ordnung für 3 Werthe von ε, dem Interpolationsfaktor, nämlich für $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.3$ und $\varepsilon = 0.5$ zusammenstellen.

Dank dem Zusammenwirken der Mitglieder des Astronomischen Seminars zu Berlin (Wintersemester 1885/86) war es mir möglich, aus recht zahlreichen Beobachtungen auch empirische Werthe für die angegebenen Fälle zu berechnen. Die Beobachtungen wurden so ausgeführt, dass z. B. mit $\varepsilon = 0.1$ ein 5. stelliger Logarithmus interpolirt und dessen Differenz gegen den entsprechenden 7. stelligen Logarithmus gebildet wurde. Dabei wurden diejenigen Stellen der Logarithmentafel vermieden, für welche $\varepsilon\Delta < 50$ war. Es ergab sich so:

I.

$\varepsilon\Delta \leqq 50.$

		$\varepsilon = 0.1$		$\varepsilon = 0.3$		$\varepsilon = 0.5$	
m	$(s-2m)\gamma$ in Einheiten der 7. Dezimale	$1-2W_m$ berechnet	$1-2W_m$ beob. (500 Beisp.)	$1-2W_m$ ber.	$1-2W_m$ beob. (500 Beisp.)	$1-2W_m$ ber.	$1-2W_m$ beob. (650 Beisp.)
0.795	20.5	37.0 %	38.4 %	38.2 %	39.8 %	38.6 %	39.4 %
0.595	40.5	65.8	63.8	69.4	66.8	70.8	69.2
0.395	60.5	85.8	87.6	89.4	88.2	89.2	86.6
0.195	80.5	97.2	97.6	98.6	97.8	98.8	97.9

II. $\varepsilon\Delta \geqq 50$

		$\varepsilon = 0.1$		$\varepsilon = 0.3$		$\varepsilon = 0.5$	
		Theoret. Werth	Empir. Werth (500 Beisp.)	Theoret. Werth	Empir. Werth (500 Beisp.)	Theoret. Werth	Empir. Werth (650 Beisp.)
in Einheiten der 7. Dezimale	ε_0	27.7*)	29.2	25.9	26.8	25.2	27.5
	ε_1	32.9	32.8	30.6	31.1	29.8	30.5

Es zeigt sich hiernach einerseits zwischen Theorie und Praxis eine völlig befriedigende, theilweise sogar überraschend gute Uebereinstimmung**), andererseits aber — und das ist von besonderer Wichtigkeit — sehen wir, dass die Verschiedenheit des ε sowohl in der Theorie, wie in der Praxis, auf die Grösse der Werthe der Wahrscheinlichkeitsfunktion und unserer beiden Potenzmittelwerthe von nur geringem, theilweise von gar keinem Einfluss ist. Jedenfalls können wir diesen Einfluss vernachlässigen und ganz allgemein für ε einen mittleren Werth als gültig annehmen, womit wir nun unsere Aufgabe ganz gelöst haben. Es liegt derselbe, wie wir sehen, etwa bei:

$$\varepsilon = 0.2 = \tfrac{1}{5}.$$

Sonach werden wir in unseren obigen Formelserien 𝔄., 𝔅., ℭ. (pag. 61 und 62) zu setzen haben:

$$F = \tfrac{4}{5} f_\alpha + \tfrac{1}{5} f_\beta + f_\gamma,$$

und:

$$\Phi = \tfrac{4}{5} f_\alpha + \tfrac{1}{5} f_\beta.$$

Dass bei wirklichen Rechnungen der Fall $\varepsilon\Delta < 50$ doch eintreten kann, ist von keiner Bedeutung, da sich dadurch die Potenzmittelwerthe nur sehr wenig verkleinern würden. Es macht übrigens keine Schwierigkeiten, einen speziellen Fall $\varepsilon\Delta < 50$

*) Das letzte Glied in ε_0: $\dfrac{\sigma'''^4 + \frac{2}{n}\sigma''^3 \ldots}{5\sqrt{6\nu \ldots}}$ (siehe pag. 65) ist in der That hier noch von Bedeutung, es ist gleich 1.7.

**) Die frühere Behauptung (Cap. 2 pag. 14), dass in der Praxis grössere Fehleraggregate noch seltener, als es der Theorie entspräche, auftreten müssten, findet auch hier wieder ihre Bestätigung.

theoretisch zu behandeln. Ist z. B. $\varepsilon\Delta = 40$, so können wir den allgemeinen Fehlerausdruck eines einzelnen interpolirten Logarithmus schreiben:

$$(1 - \varepsilon) f_\alpha + \varepsilon_1 f_\beta + \tfrac{4}{5} f_\gamma.$$

Wir erhalten in diesem Fall für den Zentralwerth ε_0 in erster Näherung:

$$\underline{\varepsilon_0 = 25.03,}$$

wenn $\varepsilon = 0.1$ gesetzt wird.

Bemerkung. Es scheint mir nöthig, hier noch einen Irrthum Bremikers zu berichtigen. Er betrachtet nämlich den Fall, dass $\varepsilon = 0.0$ oder $\varepsilon = 1.0$ wird, und bezeichnet dann in dem Fehlerausdruck:

$$(1 - \varepsilon) f_\alpha + \varepsilon f_\beta + f_\gamma$$

nur je eins der beiden ersten Glieder als wegfallend, nimmt also als Fehlermaximum wieder 100, während es sich doch dabei um den Fall eines in den Tafeln direkt stehenden Logarithmus handelt, dessen Fehlermaximum 50 ist. In Wirklichkeit verschwindet eben auch f_γ, denn das ist, wie wir sahen (pag. 62), der Abkürzungsfehler der mit ε multiplizirten Tafeldifferenz. Bei einem Tafellogarithmus ist dies Product ja aber gar nicht vorhanden. Der Zentralfehler ε_0 ist ja in diesem Fall, gemäss unseren Erörterungen im Cap. 2: $\varepsilon_0 = 25.0$. Bremiker erhält dagegen, indem er $\nu = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ annimmt, das falsche Resultat: $\varepsilon_0 = 29.3$. Offenbar ist dies nach seinen Formeln der wahrscheinliche Fehler der Summe zweier Tafellogarithmen.

Cap. 20.

Schliesslich soll an dem schon früher (Cap. 6 pag. 20—22) theilweise behandelten Beispiel der Berechnung der Zenithdistanz z eines Gestirns mittelst Kenntnis seiner Deklination δ, seines Stundenwinkels τ und der Polhöhe des Beobachtungsortes φ gezeigt werden, in welcher Weise die Formeln in der Praxis anzuwenden sind. Wir wollen uns dabei auf den praktisch wichtigsten Punkt, Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers, beschränken und werden also mittelst unserer Näherungsformel erster Ordnung:

$$\varepsilon_0 = 2\gamma\rho\sqrt{\frac{\sum\limits_{\mu=1}^{\nu}\alpha_\mu^2}{6}}$$

den wahrscheinlichen Fehler bestimmen, mit dem in Folge der Abkürzung der Logarithmen die Zenithdistanz bei Berechnung aus den gegebenen Grössen behaftet ist:

1. unter Anwendung der früher (Cap. 6 pag. 20 u. 21) explizirten Rechnungsmethode,

2. unter Anwendung der bekannten Methode mit dem Hülfswinkel,

3. unter Anwendung der sogenannten Methode der logarithmischen Differenzen.

Wir werden dadurch einen Maassstab für den Genauigkeitsgrad erhalten, den die verschiedenen Methoden rechnerisch erreichen lassen.

Betrachten wir also erst den Fall der Berechnung von z mittelst der Formel:

$$\sin^2\frac{z}{2} = \sin^2\frac{\varphi-\delta}{2} + \cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{\tau}{2}.$$

Wir hatten einen Hülfswinkel μ durch die Gleichung:

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\sin\frac{\tau}{2}\sqrt{\cos\varphi\cos\delta}}{\sin\frac{\varphi-\delta}{2}}$$

eingeführt und hatten bei Bezeichnung der in den einzelnen Logarithmen infolge ihrer Abrundung steckenden Fehler mit $f_1, f_2, \ldots, f_7$ schliesslich für den Fehler von z erhalten:

$$f''(z) = \frac{2r''}{m}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}z\left\{\cos^2\mu(f_1+\tfrac{1}{2}f_2+\tfrac{1}{2}f_3)+\sin^2\mu(f_4+f_5)-(f_6+f_7)\right\},$$

wobei $r'' = 206265''$, $m = 0.43429$ war. Offenbar können wir, da wir es doch nur mit den aus der Abrundung hervorgehenden Fehlern zu thun haben, im letzten Gliede in der Klammer statt des — Zeichen ein + Zeichen setzen, sodass wir haben:

$$f''(z) = \frac{2r''}{m}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}z\left\{\cos^2\mu(1+\tfrac{1}{2}f_2+\tfrac{1}{2}f_3)+\sin^2\mu(f_4+f_5)+(f_6+f_7)\right\}.$$

Für die f_1 bis f_7 sind unseren damaligen Erörterungen, wie denen im vorigen Kapitel entsprechend, die Werthe:

$$F = \tfrac{4}{5} f_\alpha + \tfrac{1}{5} f_\beta + f_\gamma,$$

resp.

$$\Phi = \tfrac{4}{5} f_\alpha + \tfrac{1}{5} f_\beta$$

zu setzen und zwar, wie leicht nach dem Früheren einzusehen, für f_1, f_2, f_3, f_4 und f_6: F und für f_5 und f_7: Φ.

Wir bekommen somit 19 verschiedene Elementarfehler, die wir der Reihe nach mit (1), (2), (3), ... (19) bezeichnen wollen, wie folgt:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \tfrac{4}{5}(1) + \tfrac{1}{5}(2) + (3),\\
f_2 &= \tfrac{4}{5}(4) + \tfrac{1}{5}(5) + (6),\\
f_3 &= \tfrac{4}{5}(7) + \tfrac{1}{5}(8) + (9),\\
f_4 &= \tfrac{4}{5}(10) + \tfrac{1}{5}(11) + (12),\\
f_5 &= \tfrac{4}{5}(13) + \tfrac{1}{5}(14),\\
f_6 &= \tfrac{4}{5}(15) + \tfrac{1}{5}(16) + 17),\\
f_7 &= \tfrac{4}{5}(18) + \tfrac{1}{5}(19).
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Werthe ein, so wird:

$$\begin{aligned}
f''(z) = \frac{2r''}{m} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z \Big[& \cos^2\mu \{ \tfrac{4}{5}(1) + \tfrac{1}{5}(2) + (3) + \tfrac{2}{5}(4) + \tfrac{1}{10}(5) + \tfrac{1}{2}(6) + \tfrac{2}{5}(7) + \tfrac{1}{10}(8) + \tfrac{1}{2}(9) \} + \\
& + \sin^2\mu \{ \tfrac{4}{5}(10) + \tfrac{1}{5}(11) + (12) + \tfrac{4}{5}(13) + \tfrac{1}{5}(14) \} + \\
& + \{ \tfrac{4}{5}(15) + \tfrac{1}{5}(16) + (17) + \tfrac{4}{5}(18) + \tfrac{1}{5}(19) \} \Big].
\end{aligned}$$

In Einheiten der letzten Stelle der angewandten Logarithmentafeln ist nun:

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu^2}.$$

Rechnen wir also 6. stellig, so müssen wir die rechte Seite noch mit 10^{-6} multipliziren, um ε_0 in der gewöhnlichen Zahleneinheit 1.0 zu bekommen, in der ja auch $\cos\mu$, $\sin\mu$ u. s. w., also auch $\sqrt{\sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu^2}$ ausgedrückt sind.

Es ist hier:

$$\sqrt{\sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu^2} = \frac{2r''}{m} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z \sqrt{2.52 \cos^4\mu + 2.36 \sin^4\mu + 2.36},$$

demnach:

$$\varepsilon_0''(z) = \frac{2r''}{m} \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2} z) \frac{\rho 10^{-6}}{\sqrt{6}} \sqrt{2.52 \cos^4\mu + 2.36 \sin^4\mu + 2.36},$$

oder:

$$\varepsilon_0''(z) = 0.18495 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}z \sqrt{2.52 \cos^4\mu + 2.36 \sin^4\mu + 2.36}.$$

Der wahrscheinliche Fehler von z hängt also von μ und von z selbst ab. Wenn wir den Gesammtfaktor von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}z$ erst für verschiedene μ berechnen wollen, so stellt es sich von vornherein als wünschenswerth heraus, für die Fälle $\mu > 45°$ einen anderen Weg zur Berechnung des z einzuschlagen, bei dem der Faktor von $\sin^4\mu$ eine Verminderung erfährt, natürlich auf Kosten des Koeffizienten von $\cos^4\mu$. Es ist dies in der That erreichbar, wenn wir $\sin \frac{1}{2}z$ statt mit Hülfe des $\cos\mu$ mittelst des $\sin\mu$ berechnen, wie wir im Cap. 6 (pag. 20) näher auseinandergesetzt haben.

Führen wir für diesen Fall die Fehlerberechnung, wie früher, aus, so erhalten wir:

$$\varepsilon_0''(z) = 0.18495 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}z \sqrt{3.20 \cos^4\mu + 1.68 \sin^4\mu + 2.36}.$$

Wenden wir jetzt für $\mu < 45°$ die erste, für $\mu > 45°$ die zweite Formel an — für $\mu = 45°$ gehen beide, wie erforderlich, in einander über —, so bekommen wir für in 10° Intervallen fortschreitende Werthe von μ als wahrscheinlichen Fehler $\varepsilon_0''(z)$ der Zenithdistanz folgende Werthe:

μ^0	$\varepsilon_0''(z)$
0°	$0''.40857 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$
10	$0\ .40235 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$
20	$0\ .38607 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$
30	$0\ .36641 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$
40	$0\ .35241 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$
50	$0\ .34526 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$
60	$0\ .34626 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$
70	$0\ .35628 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$
80	$0\ .36727 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$
90°	$0''.37175 \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}z$

Der Faktor von $\operatorname{tg} \frac{1}{2}z$ ist sonach ausserordentlich wenig veränderlich, so dass wir also berechtigt sind, für ihn seinen ungefähren Mittelwerth:

$$0''.37$$

anzunehmen, von dem die extremsten Werthe um kaum 7% ab-

weichen. Bei dieser Annahme ergiebt sich schliesslich, indem wir z selbst in Intervallen von 10° fortschreiten lassen, für den wahrscheinlichen Fehler folgende Werthereihe:

z^0	$\varepsilon_0''(z)$
0°	0″.00
10	0 .03
20	0 .07
30	0 .10
40	0 .14
50	0 .17
60	0 .21
70	0 .26
80	0 .31
90°	0″.37

bei 6.stelliger Rechnung.

Im ungünstigsten Fall beträgt also der wahrscheinliche Fehler, mit dem die Zenithdistanz unter Anwendung 6.stelliger Tafeln und der angegebenen Rechnungsmethode in Folge der Abkürzungsfehler der Tafeln behaftet ist, nur wenig über $\frac{1}{3}''$. Ueberdies kommt dieser Fall ja praktisch gar nicht vor. Wir können sagen für den ungünstigsten praktischen Fall ($z = 70°$ etwa) ist $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}''$.

Nunmehr wollen wir eine andere Methode prüfen, die aus der Grundformel des Problems:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\tau$$

in folgender Weise sich entwickelt.

Setzen wir:

$$\sin\delta = n \sin N,$$
$$\cos\delta \cos\tau = n \cos N,$$

wo N und n durch die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos\tau}$$

und

$$n = \frac{\sin\delta}{\sin N} \quad \text{oder} \quad n = \frac{\cos\delta\cos\tau}{\cos N}$$

bestimmt werden, so finden wir z mittelst der Formel:

$$\underline{\cos z = n \cos(\varphi - N).}$$

Es sei nun behaftet:

log tg δ mit einem Fehler f_1,
log cos τ „ „ „ f_2,
log sin δ od. log cos δ „ „ „ f_3,

dann ist:

$$f(\log \operatorname{tg} N) = f_1 - f_2,$$

und nach Formel 4) aus Serie 𝔅. (Cap. 17, pag. 62):

$$f(\varphi - N) = f(N) = \frac{r'' \sin 2N}{2m}\left\{f_1 - f_2 + f_4\right\},$$

und nach Formel 3) aus Serie 𝔄. (pag. 61):

$$f\big(\log\cos(\varphi - N)\big) = -\tfrac{1}{2}\sin 2N \operatorname{tg}(\varphi - N)\left\{f_1 - f_2 + f_4\right\} + f_5,$$

ähnlich

$$f(\log n) = f_3 - f(\log \sin N) \text{ oder } = f_3 + f_2 - f(\log\cos N),$$

also

$$f(\log n) = f_3 - \frac{m}{r''}\operatorname{ctg} N f(N) + f_6 \text{ oder } = f_2 + f_3 + \frac{m}{r''}\operatorname{tg} N f(N) + f_6$$

$$= f_3 - \cos^2 N\left\{f_1 - f_2 + f_4\right\} + f_6 \text{ od. } = f_2 + f_3 + \sin^2 N\left\{f_1 - f_2 + f_4\right\} + f_6.$$

Demnach wird:

$$f\big(\log(\cos z)\big) = f(\log n) + f\big(\log\cos(\varphi - N)\big)$$

$$= f_3 + f_5 + f_6 - (f_1 - f_2 + f_4)\left\{\tfrac{1}{2}\sin 2N \operatorname{tg}(\varphi - N) + \cos^2 N\right\}$$

$$\text{oder } = f_2 + f_3 + f_5 + f_6 + (f_1 - f_2 + f_4)\left\{\sin^2 N - \tfrac{1}{2}\sin 2N \operatorname{tg}(\varphi - N)\right\}$$

und schliesslich:

$$\underline{f''(z) = \frac{r''}{m}\operatorname{ctg} z\left[f_3 + f_5 + f_6 + f_7 + (f_1 + f_2 + f_4)\left\{\tfrac{1}{2}\sin 2N \operatorname{tg}(N - \varphi) - \cos^2 N\right\}\right]}$$

oder:

$$\underline{f''(z) = \frac{r''}{m}\operatorname{ctg} z\Big[f_3 + f_5 + f_6 + f_7 + (f_1 + f_4)\left\{\sin^2 N - \tfrac{1}{2}\sin 2N \operatorname{tg}(\varphi - N)\right\} +}$$

$$\underline{+ f_2\left\{\cos^2 N + \tfrac{1}{2}\sin 2N \operatorname{tg}(\varphi - N)\right\}\Big]}.$$

Daraus folgt:

$$\varepsilon_0''(z) = \frac{\rho}{10^6\sqrt{6}}\frac{r''}{m}\operatorname{ctg} z\sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}(N - \varphi)\sin 2N - \cos^2 N\right\}^2 \cdot 4.04 + 5.72} \quad \text{(I)}$$

oder

$$\varepsilon_0''(z) = \frac{\rho}{10^6\sqrt{6}}\frac{r''}{m}\operatorname{ctg} z\sqrt{\left\{\sin^2 N - \tfrac{1}{2}\sin 2N \operatorname{tg}(\varphi - N)\right\}^2 \cdot 2.36 + 5.72 + \left\{\cos^2 N + \tfrac{1}{2}\sin 2N \operatorname{tg}(\varphi - N)\right\}^2 \cdot 1.68}, \quad \text{(II)}$$

wenn wir nämlich für $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ einsetzen: F und für f'_4 und f_7: Φ.

$\varepsilon_0''(z)$ hängt hier also von den 3 Grössen φ, N und z ab. Beschränken wir uns jetzt auf den Fall mittlerer Breiten, nehmen wir speziell z. B. $\varphi = 45°$ an, so wird für $N < 45°$ die zweite, für $N > 45°$ die erste Formel günstigere Resultate liefern, für $N = 45°$ gehen beide in einander über. Es ist dies leicht einznsehen, wenn wir den Faktor 4.04 in (I) zerlegen in $2.36 + 1.68$, es ist dann z. B. für $N > 45°$ das mit 1.68 multiplizirte Glied in (II) gleich dem in (I), das mit 2.36 multiplizirte Glied aber ist in (II) offenbar grösser als in (I).

Kombiniren wir dementsprechend beide Formeln, so wird der wahrscheinliche Fehler von z:

N^0	$\varepsilon_0''(z)$
0°	$0.09248 \text{ ctg} z \cdot \sqrt{7.400}$
10	„ „ $\sqrt{7.733}$
20	„ „ $\sqrt{7.515}$
30	„ „ $\sqrt{7.023}$
40	„ „ $\sqrt{7.460}$
50	„ „ $\sqrt{5.721}$
60	„ „ $\sqrt{5.793}$
70	„ „ $\sqrt{5.724}$
80	„ „ $\sqrt{5.752}$
90°	„ „ $\sqrt{5.700}$

Wir können demnach für die Werthe von $N < 45°$ einen mittleren Werth des Radikanden, etwa 7.426, für die höheren Werthe von N einen zweiten mittleren Werth 5.738 annehmen. Dadurch erhalten wir schliesslich in 2 Kolumnen für verschiedene Werthe von z folgende wahrscheinliche Fehler desselben für mittlere Breiten. (Siehe die nachfolgende Tabelle auf S. 75.)

Wir sehen hieraus, dass unsere zweite Methode für mittlere Breiten jedenfalls bei grösseren Zenithdistanzen eine bedeutend genauere Rechnung gestattet, als die erste Methode, die ihrerseits wieder bei sehr kleinen Zenithdistanzen ihren Vortheil hat.

Wie weit diese Tabellen für die Praxis Vertrauen verdienen,

$\varphi = 45°$

z^0	$N < 45°$ $\varepsilon''_0(z)$	$N > 45°$ $\varepsilon''_0(z)$
0°	∞	∞
10	1″.43	1″.26
20	0 .69	0 .61
30	0 .44	0 .38
40	0 .30	0 .26
50	0 .21	0 .19
60	0 .15	0 .13
70	0 .09	0 .08
80	0 .04	0″.04
90°	0	0

bei 6. stelliger Rechnung.

wurde in folgender Weise ermittelt. Es wurde für eine mittlere Breite mit gegebenen Werthen von δ und τ die Zenithdistanz eines Gestirns z fünfstellig nach den beiden Methoden, die wir bisher behandelt haben, berechnet. Mit denselben Werthen wurde nach der ersten Methode die Rechnung siebenstellig durchgeführt. Durch Subtraktion der Ergebnisse 5. stelliger Rechnung nach Methode I und II von denen 7. stelliger Rechnung nach Methode I wurden die Fehler der einzelnen z und daraus in bekannter Weise die wahrscheinlichen Fehler der nach der ersten oder zweiten Methode 5. stellig berechneten z gefunden, wie die folgende Tabelle zeigt:

φ	δ	τ	5. stellig. Methode I	7. stellig. Methode I	5. stellig. Methode II	v_1	v_2
45°0′20″	40°0′40″	40°0′20″	29°36′ 7″.5	29°36′ 8″.58	29°36′ 8″.6	−1″.08	+0″.02
	1 42	1 22	27 .5	28 .04	25 .7	−0 .54	−2 .34
	2 44	2 24	47 .5	47 .50	51 .4	0	+3 .90
	3 46	3 26	37′ 7″.5	37′ 6 .94	37′ 7″.5	+0 .56	+0 .56
	4 48	4 28	25 .0	26 .48	30 .0	−1 .48	+3 .52
	5 50	5 30	47 .5	45 .96	37 .5	+1 .54	−8 .46
	6 52	6 32	38′ 2″.6	38′ 5 .50	38′ 0″.0	−2 .90	−5 .50
	7 54	7 34	23 .0	25 .10	17 .1	−2 .10	−8 .00
	8 56	8 36	43 .4	44 .68	42 .9	−1 .28	−1 .78
	40°9′58″	40°9′38″	29°39′ 6″.4	29°39′ 4 .26	29°39′ 0″.0	+2″.14	−4″.26

$$\text{Methode I:} \quad \varepsilon''_0(z) = 0.674\sqrt{\frac{\Sigma v_1 v_1}{10}} = 1''.1,$$

$$\text{Methode II:} \quad \varepsilon''_0(z) = 0.674\sqrt{\frac{\Sigma v_2 v_2}{10}} = 3''.2.$$

Nach unseren auf theoretischem Wege gefundenen Tabellen (s. pag. 72 u. 75) aber findet man für $\varphi = 45^\circ$ und $z = 30^\circ$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Methode I:} & \underline{\underline{\varepsilon_0''(z) = 1''.0}} \\ \text{Methode II:} & \underline{\underline{\varepsilon_0''(z) = 3''.8}} \end{array}\right\} \text{bei 5.stelliger Rechnung.}$$

Bei der relativ geringen Zahl von Versuchen darf die Uebereinstimmung wohl eine recht befriedigende genannt werden.

Es sei schliesslich noch ein drittes Verfahren zur Bestimmung der Zenithdistanz behandelt, ein Näherungsverfahren, das namentlich bei Polsternen und bei kleinen Stundenwinkeln sehr grosse Vortheile bietet.

Man erhält leicht aus der Grundformel:

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\tau$$

folgende Gleichungen:

$$\cos z = \cos \pm (\varphi - \delta) - 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{\tau}{2},$$

$$\cos \pm (\varphi - \delta) - \cos z = 2\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{\tau}{2},$$

$$\sin \pm \frac{(\varphi - \delta) + z}{2} \sin\frac{z \mp (\varphi - \delta)}{2} = \cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{\tau}{2}.$$

Nun setzen wir: $z \mp (\varphi - \delta) = x$, woraus folgt:

$$z \pm (\varphi - \delta) = x \pm 2(\varphi - \delta),$$

dann wird:

$$\underline{\underline{\sin\frac{x}{2} = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{\tau}{2}}{\sin\left(\pm(\varphi - \delta) + \frac{x}{2}\right)}.}}$$

Bei der Wichtigkeit des Näherungsverfahrens, das man für eine solche Gleichung anwenden kann, und das zur definitiven Auflösung führt, nicht nur für unsere spezielle Aufgabe, sondern auch für viele andere Probleme der sphärischen Astronomie, wollen wir die Gleichung vorläufig generell behandeln. Bei logarithmischer Auflösung hat sie folgende Gestalt:

$$\log\sin(cx) = \log\sin P \pm \log\sin(Q \pm kx).$$

Wir werden nun wohl immer einen Näherungswerth $x = x_0$

zur Verfügung haben — eventuell ist $x_0 = 0$ zu setzen —, mit dem wir finden:

$$1)\ \log\sin(cx_1) = \log\sin P \pm \log\sin(Q \pm kx_0).$$

Mit dem so gefundenen Werth x_1 könnten wir nun einen weiteren Näherungswerth x_2 berechnen aus:

$$\log\sin(cx_2) = \log\sin P \pm \log\sin(Q \pm kx_1),$$

und so könnten wir fortfahren, bis wir zu einem Werthe:

$$x_n = x_{n-1}$$

kommen, der also aus einer Endgleichung:

$$\log\sin(cx_n) = \log\sin P \pm \log\sin(Q \pm kx_n)$$

folgen würde. Mit Hülfe der Methode der logarithmischen Differenzen werden wir aber nach der Berechnung von x_1 leicht zur definitiven Lösung x_n in folgender Weise geführt.

Wir bilden die Differenz der definitiven und der ersten Näherungsgleichung:

$$\log\sin(cx_n) - \log\sin(cx_1) = \pm \log\sin(Q + kx_n) \mp \log\sin(Q + kx_0)$$

und entwickeln nun nach dem Taylor'schen Lehrsatz:

$$c(x_n - x_1)\frac{\partial \log\sin(cx_1)}{\partial(cx_1)} = \pm(x_n - x_0)\,k\,\frac{\partial \log\sin(Q \pm kx_0)}{\partial(Q + kx_0)}.$$

Setzen wir nun:

$$\frac{\partial \log\sin(cx_1)}{\partial(cx_1)} = \lambda \text{ und } \frac{\partial \log\sin(Q \pm kx_0)}{\partial(Q + kx_0)} = \mu,$$

so sind das die Veränderungen der logsin für eine Aenderung des betreffenden Winkels, also die logarithmischen Differenzen in den Tafeln für die Einheit, in der wir die Winkelinkremente einführen. Es wird sich empfehlen, je nach der Genauigkeit der ersten Annahme x_0 etwa ein Intervall von 100″ oder 1000″ oder ähnlich zu nehmen und dann zu intrapoliren, indem man von den zweiten und höheren Differenzen absieht.

Es wird also:

$$c(x_n - x_1)\lambda = \pm(x_n - x_0)k\mu,$$
$$c(x_n - x_1)\lambda = \pm(x_n - x_1)k\mu \pm (x_1 - x_0)k\mu,$$

oder:
$$2)\ x_n - x_1 \quad = \pm (x_1 - x_0) \frac{\mu k}{c\lambda \mp \mu k}.$$

Wir werden demnach mit einem rohen Näherungswerth x_0, ev. mit $x_0 = 0$ den Werth x_1 nach der Formel 1) (p. 77) berechnen und dabei gleich die Werthe für λ und μ den Tafeln entnehmen und schliesslich x_n mit denselben nach der eben gefundenen Formel 2) bestimmen.

Wollen wir nun den wahrscheinlichen Fehler $\varepsilon_0(x_n)$ des schliesslichen Werthes, soweit er als Folge der Abkürzung der letzten Dezimale der Logarithmentafeln entsteht, finden, so werden wir erst den allgemeinen Fehlerausdruck $f(x_n)$ aufstellen müssen.

Es ist offenbar nach Gleichung 2):
$$f(x_n) = f(x_1) \left\{1 \pm \frac{\mu k}{c\lambda \mp \mu k}\right\}.$$

Dagegen ist nach Gleichung 1) (pag. 77):
$$f\left\{\log\sin(cx_1)\right\} = f(\log\sin P) + f\left\{\log\sin(Q \pm kx_0)\right\},$$
also nach Serie $\mathfrak{B}$, 2) (pag. 62):
$$f(cx_1) = \frac{r''}{m} \operatorname{tg}(cx_1) \left\{f(\log\sin P + f\left\{\log\sin(Q \pm kx_0)\right\} + \Phi\right\},$$
so dass:
$$f(x_n) = \frac{r''}{cm} \operatorname{tg}(cx_1) \left\{f(\log\sin P) + f\left\{\log\sin(Q \pm kx_0)\right\} + \Phi\right\} \left\{1 \pm \frac{\mu k}{c\lambda \mp \mu k}\right\}$$
wird.

Nehmen wir nun unsere spezielle Aufgabe der Bestimmung der Zenithdistanz, so ergibt sich nach der Einführungsgleichung von x:
$$f(z) = f(x_n).$$

Ferner war:
$$c = \tfrac{1}{2},\ \pm k = + \tfrac{1}{2},\ \sin P = \cos\varphi \cos\delta \sin^2\frac{\tau}{2},\ Q = \pm(\varphi - \delta)$$

und in den Formeln 1) (pag. 77) und 2) (pag. 78) ist das untere Zeichen zu nehmen. Bezeichnen wir nun wieder die einzelnen Elementarfehler mit Symbolen (1), (2), u. s. w. (siehe pag. 70), so folgt:
$$f(\log\sin P) = \tfrac{4}{5}(1) + \tfrac{1}{5}(2) + (3) + \tfrac{4}{5}(4) + \tfrac{1}{5}(5) + (6) + \tfrac{8}{5}(7) + \tfrac{2}{5}(8) + 2 \cdot (9),$$
$$f[\log\sin(Q \pm kx_0)] = \tfrac{4}{5}(10) + \tfrac{1}{5}(11) + (12),$$
und: $$\Phi \qquad = \tfrac{4}{5}(13) + \tfrac{1}{5}(14),$$

also:

$$f''(z) = \frac{2r''}{m} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x_1 \frac{\lambda - 2\mu}{\lambda - \mu} \left[\tfrac{4}{5}(1) + \tfrac{1}{5}(2) + (3) + \tfrac{4}{5}(4) + \tfrac{1}{5}(5) + (6) + \tfrac{8}{5}(7) + \right.$$
$$\left. + \tfrac{2}{5}(8) + 2 \cdot (9) + \tfrac{4}{5}(10) + \tfrac{1}{5}(11) + (12) + \tfrac{4}{5}(13) + \tfrac{1}{5}(14) \right].$$

Hierbei ist:

$$\lambda = \frac{\partial \log \sin(\tfrac{1}{2} x_1)}{\partial (\tfrac{1}{2} x_1)}$$

und

$$\mu = \frac{\partial \log \sin \left(\pm (\varphi - \delta) + \frac{x_0}{2} \right)}{\partial \left(\pm (\varphi - \delta) + \frac{x_0}{2} \right)}.$$

Wir hatten nun aber früher gefunden:

$$\varepsilon_0 = \frac{\rho}{\sqrt{6}} \sqrt{\sum_{\mu=1}^{\nu} \alpha_\mu^2},$$

wo die α_ν die Koeffizienten der Elementarfehler (1), (2) u. s. w. waren.

Rechnen wir wieder 6. stellig, so müssen wir noch ε_0 mit 10^{-6} (siehe pag. 70) multipliziren und erhalten:

$$\varepsilon_0''(z) = \frac{2r'' \cdot \rho \cdot 10^{-6}}{m \cdot \sqrt{6}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x_1 \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \sqrt{12.44},$$

$$\varepsilon_0''(z) = 0.18495 \sqrt{12.44} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x_1 \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

$$\varepsilon_0''(z) = 0''.652 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x_1 \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Der wahrscheinliche Fehler hängt also ab von x_1, λ und μ; λ und μ aber ihrerseits von $\varphi - \delta$, x_1 und x_0. Nehmen wir nun den ungünstigsten Fall, dass wir keinen Näherungswerth x_0 haben, also $x_0 = 0$ setzen müssen, so könnten wir $\varepsilon_0(z)$ nach $\varphi - \delta$ einerseits und x_1 andererseits tabuliren. Es empfiehlt sich jedoch, da φ und δ von einander unabhängig sind, nach φ und δ einzeln zu tabuliren. Wir wollen im folgenden für eine mittlere Breite $\varphi = 40^\circ$ $\varepsilon_0(z)$ tabuliren nach x_1 und δ. Hierbei ist zu beachten, dass x_1 in einem gewissen Abhängigkeitsverhältniss von δ steht, da x_1 die Korrektion bedeutet, die an die Zenithdistanz im Meridian $z_M = \varphi - \delta$ anzubringen ist, um z für irgend einen Stundenwinkel zu erhalten. Das Maximum dieser Korrektion, d. h. die Differenz der beiden Kulminationszenithdistanzen eines Sterns ist aber $180^\circ - 2\delta$, also:

$$x_1 < 180° - 2\delta.$$

Offenbar wird x_1 bei polnahen Sternen, sowie bei kleinen Stundenwinkeln sehr klein bleiben.

Diese Begrenzung von x_1 ist aber nur für Circumpolarsterne hinreichend, für nicht circumpolare Sterne müssen wir noch berücksichtigen, dass die Zenithdistanz z eines Sterns nie grösser als 90° sein kann, dass demnach zufolge der Einführungsgleichung für x (siehe pag. 76):

$$x = z \mp (\varphi - \delta),$$

wo das untere Zeichen für $\varphi - \delta < 0$ gilt, jedenfalls:

$$x_1 \leqq 90° \mp (\varphi - \delta)$$

sein muss.

Andererseits war Voraussetzung für unsere Endformel 2), dass:

$$c\lambda > \mu k,$$

denn sie folgte aus der Gleichung:

$$c(x_n - x_1)\lambda = \pm (x_n - x_0) k\mu.$$

Offenbar muss aber x_1 als zweiter Näherungswerth näher am definitiven x_n liegen, als der erste x_0, d. h:

$$x_n - x_1 < x_n - x_0.$$

Damit trotzdem die Gleichheit beider Ausdrücke stattfindet, muss also:

$$c\lambda > \mu k,$$

oder speziell in unserm Beispiel:

$$\lambda > \mu$$

sein.

In der Tabelle sind diejenigen Felder, welche Kombinationen x_1, δ entsprechen, für die:

$$x_1 \geqq 180° - 2\delta \text{ oder } x_1 > 90° \mp (\varphi - \delta)$$

sein würde, mit $+$, $-$ die anderen aber, soweit für sie:

$$\lambda \leqq \mu$$

ist, mit — bezeichnet.

Mittelst der folgenden Hülfstabellen I, II, III:

I.

x_1	0″.652 tg $\frac{1}{2} x_1$
30′	0″.0028
1°	0057
3°	0171
5°	0285
7°	0399
10°	0570
15°	0858
20°	1150
30°	1747
40°	2373
50°	0″.3040

II.

δ =	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°	89°
μ = für 10″	25	36	58	119	∞	119	58	36	25	21	18

III.

x_1 =	30′	1°	3°	5°	7°	10°	15°	20°	30°	40°	50°
λ = für 10″	4799	2406	803	482	344	241	156	119	79	58	45

erhalten wir für den wahrscheinlichen Fehler der Zenithdistanz $\varepsilon_0''(z)$ folgende Werthe:

bei 6. stell. Rechnung. $\varepsilon''_0(z)$ $\varphi = 40°$

δ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°	89°
x_1											0″.00
30′	0″.00	0″.00	0″.00	0″.00	—	0″.00	0″.00	0″.00	0″.00	0″.00	0″.00
1°	0.01	0.01	0.01	0.01	—	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0″.01
3°	0.02	0.02	0.02	0.01	—	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	+
5°	0.03	0.03	0.03	0.02	—	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	+
7°	0.04	0.04	0.03	0.03	—	0.03	0.03	0.04	0.04	0″.04	+
10°	0.05	0.05	0.05	0.04	—	0.04	0.05	0.05	0.05	+	+
15°	0.07	0.07	0.06	0″.05	—	0″.05	0.06	0.07	0″.07	+	+
20°	0.10	0.09	0.08	—	—	—	0.08	0.09	+	+	+
30°	0.13	0.12	0″.10	—	—	—	0″.10	0″.12	+	+	+
40°	0.17	0.15	—	—	—	—	—	+	+	+	+
50°	0″.19	0″.17	—	—	—	—	—	+	+	+	+
60°	+	—	—	—	—	—	—	+	+	+	+
70°	+	+	—	—	—	—	+	+	+	+	+
80°	+	+	+	—	—	—	+	+	+	+	+
90°	+	+	+	+	—	+	+	+	+	+	+

Wir sehen daraus, dass bei Sternen, die bis zu 10° vom Pol abstehen, der grösste wahrscheinliche Fehler, mit dem in Folge

6

der Abkürzung der Logarithmen die Zenithdistanz behaftet sein kann, bei 6. stelliger Rechnung unter 0″.07 bleibt. Andererseits bleibt immer $\varepsilon_0''(z) < 0''.1$, wenn die erste Näherung x_0 nur bis zu 20° fehlerhaft war. Die wenigen Fälle, wo $\varepsilon_0(z) > 0''.1$ wird, entsprechen einerseits sehr grossen Stundenwinkeln, — in solchen Fällen werden wir aber leicht eine bessere Näherung für x_0 annehmen können — andererseits einer sehr geringen Höhe des Sterns über dem Horizont. Z. B. entspricht das mögliche Maximum des wahrscheinlichen Fehlers von 0″.19 dem grössten Stundenwinkel eines Sterns bei einer gleichzeitigen Höhe von nur 20° über dem Horizont, in der eine Beobachtung ja auch aus andern Gründen (Refraktion u. s. w.) möglichst zu vermeiden ist. Bei kleinen Stundenwinkeln und polnahen Sternen bleiben die Fehler, wie man sieht, in sehr engen Grenzen. Unbrauchbar wird die Methode aber für $\varphi - \delta = 0^\circ$ oder allgemeiner für $\varphi - \delta + \frac{x_0}{2} = 0^\circ$, resp. für Werthe dieser Ausdrücke, die nicht um Vieles von 0° verschieden sind.

Die Vorzüge, die das auseinandergesetzte Rechnungsverfahren bei vorsichtiger Anwendung bietet, dürften wohl offen zu Tage liegen.

Zum Schluss möchte ich noch einmal darauf hinweisen, dass die eigenthümliche Erscheinung, dass bei den Logarithmenfehlern die Bremiker'sche Theorie eine Dissonanz gegen die Praxis zeigt, auch bei unseren weiter geführten Reihenentwicklungen bestehen bleibt. Vielleicht dürfte eine weitere Untersuchung in der Richtung, wie sie am Ende des Cap. 11 angedeutet ist, dazu führen, den wahren Grund der Erscheinung zu finden.

Johannes Eugenius Stadthagen de vita sua.

Natus sum Berolini anno MDCCCLXIV a. d. XIII. Cal. Dec. patre Davidio, matre Coelina e gente Bein. Fidem confiteor evangelicam. In schola elementari, quae est cum gymnasio Friedericiano Berolinensi coniuncta, primis litterarum rudimentis eruditus nono aetatis meae anno gymnasio sum adscriptus. Auctumno anni MDCCCLXXXI maturitatis ornatus testimonio in album academicum huius Universitatis Friedericae Guilelmae receptus sum, in qua cum mathematicis studiis et physicis, tum astronomicis quattuor per annos incubui. Viros clarissimos audivi docentes: Bruns, Feller, Foerster, Fuchs, de Helmholtz, Hettner, Kayser, Kirchhoff, Knoblauch, Koenig, Kronecker, Lehmann-Filhés, Michaelis, Paulsen, Tietjen, de Treitschke, Wangerin, Weierstrass. Per tres semestres in academia polytechnica professoris Paalzow auctoritate et consilio observationibus physicis vacavi. Ad exercitationes seminarii astronomici me admiserunt professores Foerster et Tietjen. Observationum in observatorio astronomico regio instituendarum ab anni MDCCCLXXXIII aestate benigne comiterque participem me fecit ill. Foerster neque consilio atque opera me adiuvare destitit.

Ab aestate MDCCCLXXXIV investigationis socius sum observationum rerum, quae „Erdströme“ dicuntur quaeque sunt curae et societati electrotechnicae et regiae litterarum academiae. Sextili anni MDCCCLXXXVII cum aliis in urbem „Fürstenwalde“ perfectae solis defectionis observandae causa missus sum.

Cum omnibus professoribus ill., optime de me meritis, tum imprimis praeclarissimis viris Foerster et Tietjen hoc hoco gratias ago quam maximas semperque habebo.

Thesen.

1. Die sogenannten dynamischen Parallaxenbestimmungen auf Grund der sowohl innerhalb des planetarischen, als innerhalb des tellurisch-lunaren Raumes beobachteten Beschleunigungswirkungen einer und derselben Massenanziehung sind allen andern Methoden vorzuziehen.

2 Die Methode der geographischen Längenbestimmung aus electrischen und magnetischen Störungserscheinungen ist einer fruchtbringenden Entwicklung fähig.

3. Zur Erklärung der Veränderlichkeit der Sterne reicht eine einzige der gewöhnlichen Hypothesen nicht aus.

4. Das Streben nach möglichster Verbesserung der astronomischen Linsen ist ungleich wichtiger, als das Streben nach Herstellung von Linsen enormer Dimensionen.



